# ANALISI II - PARTE 1

## A. TOPOLOGIA - LO SPAZIO EUCLIDEO DI DIMENSIONE n

1. Richiamo delle definizioni di spazio vettoriale, prodotto scalare e modulo. (vedere altri appunti)
2. Cenni di Topologia in Rn:

| | |
|---|---|
| **Intorni circolari** | Considerato un punto $P=(X_1,X_2,......,X_n)$ e un raggio r > 0,<br>l'intorno centrato in P con raggio r e dato da<br>$Br(P)=\{(x_1,x_2,......,x_n)\in\Re^n / \|(x_1,x_2,......,x_n)-(X_1,X_2,......,X_n)\|< r\}$ |
| **Punti interni** | Insieme dei punti, per i quali il loro intorno circolare è contenuto nell'insieme $Br(P)\subseteq E$ |
| **Punti isolati** | Se $\exists r>0 / Br(P)\cap E=\{P\}$ (sono punti di frontiera) |
| **Punti di accumulazione** | $\forall r>0, \exists A\in E, A\neq P / A\in Br(P)$ (sono punti di frontiera) |
| **Punti di frontiera** | Insieme dei punti, per i quali l'intersezione del loro intorno con E e il suo complementare risulta non nullo<br>$\forall r>0, Br(P)\cap E\neq 0 \wedge Br(P)\cap C(E)\neq 0$ |

3. Insiemi:

| | |
|---|---|
| **Insiemi aperti** | Se ogni punto dell'insieme è un punto interno, ovvero non ha punti di frontiera<br>Caso particolare: l'insieme vuoto e Rn sono considerati aperti e chiusi |
| **Insiemi chiusi** | Se il suo complementare è aperto -> $acc(E)\subseteq E$ oppure $\partial E\subseteq E$ |
| **Chiusura** | Insieme costituito dai punti di E e dai suoi punti di accumulazione |
| **Insieme limitato** | Insieme limitato da una costante,<br>ovvero se è contenuto in una "palla" n-dimensionale centrata nell'origine |
| **Insieme connesso** | se $\exists A_1, A_2 aperti / (A=A_1\cup A_2)\wedge(A_1\cap A_2=0)$ |

## A. CURVE NEL PIANO E IN Rn

1. Curve in R2 e in Rn.

| | *CURVE NEL PIANO* | *CURVE IN Rn* |
|---|---|---|
| **Curva** | Qualsiasi funzione continua con I = intervallo<br>$\varphi: I->\mathbb{R}^2 \wedge I\subseteq\mathbb{R}$<br>Cioè con $x, y: I->\mathbb{R}, continue$<br>$\forall t\in I, \varphi(t)=(x(t),y(t))\in\mathbb{R}$ | Qualsiasi funzione continua con I = intervallo<br>$\varphi: I->\mathbb{R}^n \wedge I\subseteq\mathbb{R}$<br>Cioè con $x_i: I->\mathbb{R}, continue$<br>$\forall t\in I, \varphi(t)=(x_1(t),x_2(t),......x_n(t))\in\mathbb{R}$ |
| **Equazione parametrica** | $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases} \quad t\in I$<br>Con x(t) e y(t) = **componenti** | $\begin{cases} x_1=x_1(t) \\ x_2=x_2(t) \\ \vdots \\ x_n=x_n(t) \end{cases} \quad t\in I$ |
| **Sostegno** | Immagine $\varphi(I)=\{(x(t),y(t)) / t\in I\}$<br>È un sottoinsieme di R2, non una funzione.<br>Curve diverse possono avere lo stesso sostegno. | |
| **Curva semplice** | Se $\forall t_1\in I, t_2\in I -> \varphi(t_1)\neq\varphi(t_2)\wedge t_1\neq t_2$ | |

| | |
|---|---|
| **Arco di curva** | Una curva viene detta Arco di curva se l'intervallo I è chiuso e limitato -> I = [a,b] |
| **Curva chiusa** | Quando l'arco di curva ha $\varphi(a)=\varphi(b)$ |

2. Curve non parametriche:

| | |
|---|---|
| **Curve ordinarie** | Curva avente come sostegno il grafico di f. $f:[a,b]->\mathbb{R}, continua$ $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}$ $t\in[a,b]$ |
| **Curve polari** | Distanza dall'origine che il punto forma con l'asse x in funzione dell'angolo $\theta$ $\rho=\rho(\theta), \theta_0\le\theta\le\theta_1$ Equazione parametrica: $\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos(\theta) \\ y=\rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ $\theta\in[\theta_0,\theta_1]$ |

3. **Curve di classe C1** -> se le componenti della curva (x(t),y(t)) sono derivabili con derivata continua.

4. Curve regolari:

| | |
|---|---|
| **Curva regolare** | Se è di classe C1 e $\forall t\in I, \varphi'(t)=(x'(t),y'(t))\neq(0,0)$ (no estremi di I) |
| **Vettore tangente** | $v_t=(x'(t),y'(t))$ (Siccome la curva è regolare non si annulla mai) |
| **Versore tangente** | $T(t_0)=\dfrac{\varphi'(t_0)}{\lvert\varphi'(t_0)\rvert}=\left(\dfrac{x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}},\dfrac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}}\right)$ |
| **Versore normale** | $N(t_0)=\left(\dfrac{y'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}},\dfrac{-x'(t_0)}{\sqrt{(x'(t_0))^2+(y'(t_0))^2}}\right)$ |
| **Equazione retta tangente** | $(x-x(t_0))\cdot y'(t_0)=(y-y(t_0))\cdot x'(t_0)$ $(x'(t_0),y'(t_0))\neq(0,0)$ <br> **<u>Dim:</u>** <br> 1) Considero la retta secante passante per $\begin{cases} \varphi(t_0)=(x(t_0),y(t_0)) \\ \varphi(t_1)=(x(t_1),y(t_1)) \end{cases}$ <br> Ha equazione: $(x-x(t_0))\cdot(y(t_1)-y(t_0))=(y-y(t_0))\cdot(x(t_1)-x(t_0))$ <br> 2) Divido tutto per $(t_1-t_0)$ <br> $(x-x(t_0))\cdot\dfrac{(y(t_1)-y(t_0))}{(t_1-t_0)}=(y-y(t_0))\cdot\dfrac{(x(t_1)-x(t_0))}{(t_1-t_0)}$ <br> 3) Se f è regolare, faccio tendere t1 a t0 <br> $(x-x(t_0))\cdot y'(t_0)=(y-y(t_0))\cdot x'(t_0)$ <br> Ottengo l'equazione di una retta. <br> 4) Se x'(t0) e y'(t0) non si annullano contemporaneamente si dice retta tangente. |

5. **Curve rettificabili:**

Sia $\varphi:[a,b]->\mathbb{R}^2$ un arco di curva

$\mathfrak{D}$ = l'insieme di tutte le suddivisioni D di [a,b] /

$$D\in\mathfrak{D} \quad \Leftrightarrow D=\{t_0,t_1,......,t_n\}\wedge a=t_0<t_1<......<t_n=b$$

f è rettificabile se $\sup\limits_{D\in\mathfrak{D}}\sum_{i=1}^{n}\lvert\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})\rvert<+\infty$

6. **Lunghezza della curva:** $L(\varphi) = \sup_{D \in \mathfrak{D}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})|$

7. **Teorema di rettificabilità delle curve C1**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\varphi : [a,b] -> \mathbb{R}^2$ è un arco di curva di classe |
| Tesi | 1) La curva è rettificabile<br>2) La lunghezza della curva vale: $L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$ |

8. Lunghezza di curve polari e di grafici:

| | |
|---|---|
| **Lunghezza di curve polari** | $L(\varphi) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,d\theta$<br>**Dim:**<br>1) Considero $\varphi'(\theta) = \begin{cases} x'(\theta) = \rho'(\theta)\cos(\theta) - \rho(\theta)\sin(\theta) \\ y'(\theta) = \rho'(\theta)\sin(\theta) + \rho(\theta)\cos(\theta) \end{cases}$<br>2) $(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 = (\rho')^2\cos^2(\theta) + \rho^2\sin^2(\theta) \cancel{- 2\rho'\cdot\rho\sin(\theta)\cos(\theta)} +$<br>$+ (\rho')^2\sin^2(\theta) + \rho^2\cos^2(\theta) \cancel{+ 2\rho'\cdot\rho\sin(\theta)\cos(\theta)}$<br>$= (\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2$<br>3) $L(\varphi) = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}\,d\theta$ |
| **Lunghezza di curve ordinarie (grafici)** | $L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$ |

9. Curve c1 a tratti e lunghezza di curve c1 a tratti:

| | |
|---|---|
| **Curve C1 a tratti** | Se esiste una suddivisione di [a,b] $a = t_0 < t_1 < \ldots\ldots < t_n = b$<br>Tale che le curve $\varphi_i : [t_{i-1}, t_i] -> \mathbb{R}$<br>definite da $\varphi_i(t) = \varphi(t) \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i]$ sono di classe C1.<br>Le curve C1 a tratti sono rettificabili. |
| **Lunghezza curve C1 a tratti** | $L(\varphi) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) + \ldots\ldots + L(\varphi_n)$ |

## A. LIMITI E CONTINUITA'

1. Data $f : A -> \mathbb{R} \qquad A \subseteq \mathbb{R}^n$

| | |
|---|---|
| **Dominio e insieme immagine** | A ogni $(x_1, \ldots\ldots x_n) \in A$ associa $f(x_1, \ldots\ldots x_n) \in \mathbb{R}$<br>***Dominio*** ***Immagine*** |
| **Grafico** | Sottoinsieme di $\mathbb{R}^{n+1}$ definito da $\{(x_1, \ldots\ldots x_n, f(x_1, \ldots\ldots x_n)) / (x_1, \ldots\ldots x_n) \in A\}$ |
| **Insiemi di livello** | $\{f = c\} = \{(x_1, \ldots\ldots x_n) \in A / f(x_1, \ldots\ldots x_n) = c\}$<br>Se $c \notin f(A)$ allora l'insieme di livello è vuoto |
| **Insiemi di sottolivello** | $\{f \leq c\}$ e $\{f < c\}$ |

$\{f \geq c\} \quad \{f > c\}$

| **Insiemi di sopralivello** | e |
|---|---|

2. **Definizione di limite finito** (tutte uguali) e limite radiale

| | |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | $f: I -> \mathbb{R} \quad x_0 \in acc(I) \quad I \subseteq \mathbb{R}$<br>$\lim_{x->x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in I, 0 <\| x - x_0 \| < \delta \Rightarrow \| f(x) - l \| < \varepsilon$ |
| $\mathbb{R}^2$ | $f: A -> \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) \in acc(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^2 \quad \lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$<br>$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in A, 0 <\| (x,y) - (x_0, y_0) \| < \delta \Rightarrow \| f(x,y) - l \| < \varepsilon$ |
| $\mathbb{R}^n$ | $f: A -> \mathbb{R} \quad (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in acc(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$<br>$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x_1, ..., x_n) \in A, 0 <\| (x_1, ..., x_n) - (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \| < \delta \Rightarrow \| f(x_1, ..., x_n) - l \| < \varepsilon$ |
| **Limiti radiali** | Quando il limite esiste, tutti i limiti radiali esistono e sono uguali tra loro:<br>$\lim_{(x,y)->(x_0,y_0)} f(x,y) = l \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \lim_{x->x_0} f(x, y_0 + m(x - x_0)) = l$<br><u>Oss.</u> -> *Possono esistere tutti i limiti radiali ed essere uguali senza che esista il limite globale* |

3. Teoremi sui limiti:

| | |
|---|---|
| **Unicità del limite** | Se il limite esiste, questo è unico |
| **Limite della somma, del prodotto e del quoziente** | <u>Ipotesi:</u> $f, g : A -> \mathbb{R} \quad (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in acc(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$<br>$\lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) = l_1 \quad \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} g(x_1, ..., x_n) = l_2$<br><u>Tesi:</u><br>$\exists \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) + g(x_1, ..., x_n) = l_1 + l_2$<br>$\exists \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) \cdot g(x_1, ..., x_n) = l_1 \cdot l_2$<br>$\exists \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) / g(x_1, ..., x_n) = l_1 / l_2$ |
| **Prodotto di una funzione limitata per una infinitesima** | <u>Ipotesi:</u> $f, g : A -> \mathbb{R} \quad (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in acc(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^n \quad \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} g(x_1, ..., x_n) = 0$<br>$\exists M > 0 / \forall (x_1, ..., x_n) \neq (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \wedge \| f(x_1, ..., x_n) \| \leq M$<br><u>Tesi:</u> $\exists \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) \cdot g(x_1, ..., x_n) = 0$ |
| **Teorema dei 2 carabinieri** | <u>Ipotesi:</u> $f, g, h : A -> \mathbb{R} \quad (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in acc(A) \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$<br>$\lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} f(x_1, ..., x_n) = \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} h(x_1, ..., x_n) = l$<br>$\forall (x_1, ..., x_n) \in A / \{(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)\} \Rightarrow f(x_1, ..., x_n) \leq g(x_1, ..., x_n) \leq h(x_1, ..., x_n)$<br><u>Tesi:</u> $\exists \lim_{(x_1,...,x_n)->(\overline{x}_1,...,\overline{x}_n)} g(x_1, ..., x_n) = l$ |

4. Definizione di **funzione continua**:

| Data $f: A -> \mathbb{R}$ con $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ la funzione è continua… | |
|---|---|
| **In un punto** | Se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall (x_1, ..., x_n) \in A$ con $\| (x_1, ..., x_n) - (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \| < \delta$<br>Si ha $\| f(x_1, ..., x_n) - f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \| < \varepsilon$ |
| **In un insieme A** | Se è continua in $(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \quad \forall (\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n) \in A$ |

**5.** **Teorema della permanenza del segno**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A- > \mathbb{R} \quad A \subseteq \mathbb{R}^n$<br>2) Funzione continua in $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \in A$<br>3) $f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) > 0 (< 0)$ |
| Tesi | $\exists \delta > 0 / f(x_1,...,x_n) > 0 (< 0) \quad \forall (x_1,...,x_n) \in A \cap B_\delta(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ |
| Dimostrazione | 1) Suppongo $f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) > 0$ (Dimostrazione analoga anche se <0)<br>2) Pongo $\varepsilon = \frac{1}{2} f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) > 0$<br>3) Per la definizione di funzione continua se $\lvert (x_1,...,x_n) - (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \rvert < \delta$<br>$\exists \delta > 0 / \lvert f(x_1,...,x_n) - f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \rvert < \varepsilon \qquad \Rightarrow \forall (x_1,...,x_n) \in B_\delta(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$<br>$0 < \frac{1}{2} f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) < f(x_1,...,x_n) < \frac{3}{2} f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n)$ |

6. **Insiemi di sopra e sotto livello di funzioni continue**

| | |
|---|---|
| Proposizione | Sia $f : \mathbb{R}^n - > \mathbb{R}$ una funzione continua in $\mathbb{R}^n$ e C un numero reale.<br>Allora gli insiemi $\{f < c\}$ e $\{f > c\}$ sono aperti, $\{f \leq c\}$ e $\{f \geq c\}$ sono chiusi. |
| Dimostrazione | Dimostriamo che $\{f > c\}$ è aperto. *(Analogamente si dimostra che $\{f < c\}$ è aperto)*<br>A) Se $\{f > 0\} = \varnothing \Rightarrow$ aperto<br>B) Se $\{f > 0\} \neq \varnothing$ dobbiamo dimostrare che ogni punto $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \in \{f > 0\}$ sia interno<br>1. $(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \in \{f > 0\} \Leftrightarrow f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) > c \Rightarrow f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) - c > 0$<br>2. Siccome (f-C) è una funzione continua (somma di funzione continua e una costante), per il teorema della permanenza del segno:<br>$\exists \delta > 0 / \forall (x_1,...,x_n) \in B_\delta(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \Rightarrow (f - c) > 0$ Cioè $f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) - c > 0 \Rightarrow f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) > c$<br>3. Quindi $\forall (x_1,...,x_n) \in B_\delta(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n), (x_1,...,x_n) \in \{f > c\}$ cioè $B_\delta(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \subseteq \{f > c\}$<br>*Questo dimostra che i punti sono interni e quindi l'insieme è aperto*<br>4. Glia altri insiemi sono chiusi perché complementari di insiemi aperti<br>5. {f = C} è chiuso perché intersezione di insiemi chiusi |

7. Teorema di Weierstrass;

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A- > \mathbb{R}$ funzione continua in $A \subseteq \mathbb{R}^n$<br>2) A = chiuso e limitato |
| Tesi | La funzione ammette massimo e minimo assoluti in A<br>$\exists (\bar{x}_1,...,\bar{x}_n), (\bar{y}_1,...,\bar{y}_n) \in A / \forall (x_1,...,x_n) \in A \Rightarrow f(\bar{x}_1,...,\bar{x}_n) \leq f(x_1,...,x_n) \leq f(\bar{y}_1,...,\bar{y}_n)$ |

8. Teorema dei valori intermedi

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A- > \mathbb{R}$ funzione continua in $A \subseteq \mathbb{R}^n$<br>2) A = connesso<br>3) Presi 2 punti $(x_1,...,x_n), (y_1,...,y_n) \in A / f(x_1,...,x_n) < f(y_1,...,y_n)$ |
| Tesi | La funzione ammette ogni valore tra i 2 punti considerati<br>$\forall c \in \mathbb{R} / f(x_1,...,x_n) < c < f(y_1,...,y_n) \Rightarrow \exists (z_1,...,z_n) \in A / f(z_1,...,z_n) = c$ |

# ANALISI II - PARTE 2

## B. CALCOLO DIFFERENZIALE

| | | |
|---|---|---|
| 1 | **Derivata parziale** | • Rispetto a x -> è data dal limite (se esiste ed è finito) $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$ <br> • Rispetto a y -> è data dal limite (se esiste ed è finito) $\lim_{k\to 0}\frac{f(x_0,y_0+k)-f(x_0,y_0)}{k}$ |
| 2 | **Funzioni derivabili parzialmente** | • In un punto se $\exists \frac{df}{dx}(x_0,y_0)\wedge\exists\frac{df}{dy}(x_0,y_0)$ <br> • In un insieme A se è derivabile in (x,y) $\forall(x,y)\in A$ |
| 3 | **Vettore gradiente** | $\nabla f(x_0,y_0)=\left(f_x'(x_0,y_0),f_y'(x_0,y_0)\right)$ |

4. **Relazione tra derivabilità e continuità**

   - Le funzioni continue non sono necessariamente derivabili
   - Le funzioni derivabili non sono necessariamente continue

5. **Funzioni differenziabili** se valgono entrambe le condizioni:

   A) La funzione è derivabile, quindi esistono le sue derivate parziali

   B) $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\cdot f_x'(x_0,y_0)-k\cdot f_y'(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$

6. **Piano tangente al grafico** di una funzione

   - Riscrivo la proprietà 5.B utilizzando gli o-piccoli

$$f(x_o+h,y_o+k)-f(x_o,y_o)-h\cdot f'_x(x_o,y_o)-k\cdot f'_y(x_o,y_o)=\sigma(\sqrt{h^2+k^2})$$

   - Applico la sostituzione di variabile -> $x=x_o+h \quad y=y_o+k$
   - Osservo che: $\sigma(\sqrt{h^2+k^2})=\sigma(\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2})=\sigma(\|(x,y)-(x_o,y_o)\|)$
   - Quindi:

$$z=f(x,y)=f(x_o,y_o)+(x-x_o)\cdot f'_x(x_o,y_o)+(y-y_o)\cdot f'_y(x_o,y_o)+\sigma(\|\cancel{(x,y)-(x_o,y_o)}\|)$$

7. **Teorema sulla continuità delle funzioni differenziabili**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f:A\to\mathbb{R}$ con $A\subseteq\mathbb{R}^2 aperto$ <br> 2) La funzione f differenziabile in $(x_o,y_o)$ |
| Tesi | La funzione è anche continua in $(x_o,y_o)$ |
| Dimostrazione | 1) Se f è differenziabile i $(x_o,y_o)$ , per (x,y) che varia in un intorno c $(x_o,y_o)$ possiamo scrivere: <br> $f(x,y)=f(x_o,y_o)+(x-x_o)\cdot f'_x(x_o,y_o)+(y-y_o)\cdot f'_y(x_o,y_o)+\sigma(\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2})$ <br> 2) Quindi $\lim_{(x,y)\to(x_o,y_o)} f(x,y)=f(x_o,y_o)$ <br> La funzione è continua per la definizione di continuità. <br> Oss. -> Non è vero il viceversa: esistono funzioni continue che non sono differenziabili. |

8. **Teorema del differenziale**

<table>
<tr><td>Ipotesi</td><td>1) $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$<br>2) f derivabile in A<br>3) $f'_x$ e $f'_y$ continue in $(x_o, y_o) \in A$</td></tr>
<tr><td>Tesi</td><td>La funzione f è differenziabile in $(x_o, y_o)$</td></tr>
<tr><td>Dimostrazione</td><td>

1) Siccome A è aperto, esiste un quadrato Q(R) centrato in $(x_o, y_o)$ e contenuto in A per cui

$$\exists R > 0 / (x_o - R, x_o + R) \times (y_o - R, y_o + R) \subset A$$

2) Se considero $h, k \in (-R, R)$ allora $(x_o, y_o), (x_o + h, y_o), (x_o + h, y_o + k) \in Q_R \subset A$

3) In questo modo i segmenti di estremi
$(x_o, y_o) e (x_o + h, y_o)$ e $(x_o + h, y_o) e (x_o + h, y_o + k)$ sono contenuti in A

4) Uso la definizione di differenziabilità.
Devo controllare che si verifichino entrambe le condizioni:
- La funzione è derivabile (per ipotesi)
- Devo verificare che $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - h \cdot f_x'(x_0, y_0) - k \cdot f_y'(x_0, y_0)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$

5) Considero
$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) = [f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)] + [f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)]$$

6) Applico il teorema del valor medio a $f(x, y_0)$
Nell'intervallo di estremi $x_0$ e $x_0$+h:

$$\exists \theta_1(h) \in (0,1) / \frac{f(x_o + h, y_o) - f(x_o, y_o)}{h} = f'_x(x_o + h \cdot \theta_1(h), y_o)$$

7) Applico il teorema del valor medio a $f(x_o + h, y)$
Nell'intervallo di estremi $y_0$ e $y_0$+k:

$$\exists \theta_2(h,k) \in (0,1) / \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o + h, y_o)}{k} = f'_y(x_o + h, y_o + k \cdot \theta_2(h))$$

8) Posso scrivere:
$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) = h \cdot f'_x(x_o + h \cdot \theta_1(h), y_o) + k \cdot f'_y(x_o + h, y_o + k \cdot \theta_2(h))$$

9) Verifico la differenziabilità usando il limite (punto 4)

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - h \cdot f'_x(x_o, y_o) - k \cdot f'_y(x_o, y_o)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h \cdot f'_x(x_o + h \cdot \theta_1(h), y_o) + k \cdot f'_y(x_o + h, y_o + k \cdot \theta_2(h)) - h \cdot f'_x(x_o, y_o) - k \cdot f'_y(x_o, y_o)}{\sqrt{h^2 + k^2}} =$$

$$= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h}{\sqrt{h^2 + k^2}} \underbrace{[f'_x(\underbrace{x_o + h \cdot \theta_1(h)}_{x_0 \text{ perché } 0<\theta<1}, y_o) - f'_x(x_o, y_o)]}_{0 \text{ per la continuità di } f'x} + \frac{k}{\sqrt{h^2 + k^2}} \underbrace{[f'_y(\underbrace{x_o + h, y_o + k \cdot \theta_2(h)}_{(x_0, y_0) \text{ perché } 0<\theta<1}) - f'_y(x_o, y_o)]}_{0 \text{ per la continuità di } f'y} =$$

Quindi il limite tende a 0.
E' verificata la proprietà di differenziabilità, quindi la funzione è differenziabile.

</td></tr>
</table>

9. **Funzioni di classe C1** -> se la funzione è derivabile in A (aperto) e le sue derivate parziali sono continue in A

10. Definizione di **derivata direzionale:**

Sia $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$ e $(x_o, y_o) \in A$. Sia dato un versore $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$.
Il seguente limite (se esiste ed è finito) è detto derivata direzionale: $\lim_{t \to 0} \frac{f(x_o + t \cdot v_1, y_o + t \cdot v_2) - f(x_o, y_o)}{t}$

**11.** Calcolo della derivata direzionale:

Posto $g(t)=f(x_o+t\cdot v_1, y_o+t\cdot v_2)$,

f ammette la derivata direzionale in $(x_o, y_o)$ se e solo se g è derivabile per t=0 e si ha $g'(0)=\frac{\partial f}{\partial v}(x_o,y_o)$

**12.** **Derivate direzionali di funzioni differenziabili**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f: A\to\mathbb{R}$ con $A\subseteq\mathbb{R}^2 aperto$<br>2) La funzione f è differenziabile in $(x_o,y_o)\in A$ |
| Tesi | $\forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2, \lvert v\rvert=1\to\exists\frac{\partial f}{\partial v}(x_o,y_o)=<\nabla f(x_o,y_o),v>=f'_x(x_o,y_o)\cdot v_1+f'_y(x_o,y_o)\cdot v_2$ |
| Dimostrazione | 1) Ricordando che una funzione è differenziabile se<br>$f(x_o+h,y_o+k)-f(x_o,y_o)-h\cdot f'_x(x_o,y_o)-k\cdot f'_y(x_o,y_o)=\sigma(\sqrt{h^2+k^2})$<br>2) Riscrivo il rapporto incrementale utilizzando $h=t\cdot v_1$ e $k=t\cdot v_2$<br>$\frac{f(x_o+t\cdot v_1,y_o+t\cdot v_2)-f(x_o,y_o)}{t}=\frac{(t\cdot v_1)\cdot f'_x(x_o,y_o)+(t\cdot v_2)\cdot f'_y(x_o,y_o)+\boxed{\sigma(\lvert t\cdot v\rvert)}}{t}=$<br>$=v_1\cdot f'_x(x_o,y_o)+v_2\cdot f'_y(x_o,y_o)+\frac{\boxed{\sigma(\lvert t\rvert)}}{t}$ $\leftarrow$ $\boxed{\lvert t\cdot v\rvert=\lvert t\rvert\cdot\lvert v\rvert=\lvert t\rvert}$ Perché v = versore<br>3) Osservando che $\frac{\sigma(\lvert t\rvert)}{t}=\frac{\sigma(\lvert t\rvert)}{\lvert t\rvert}\cdot\frac{\lvert t\rvert}{t}\xrightarrow{t\to 0}0$<br>4) Si ha che $\lim_{t\to 0}\frac{f(x_o+t\cdot v_1,y_o+t\cdot v_2)-f(x_o,y_o)}{t}=v_1\cdot f'_x(x_o,y_o)+v_2\cdot f'_y(x_o,y_o)$ |

**13.** **Significato geometrico del gradiente**

Se f è una funzione differenziabile, il suo gradiente, quando non è nullo, punta sempre nella direzione (e verso) di massima pendenza del grafico di f.

**Dim:**

1) Considero la conseguenza del teorema delle derivate direzionali di funzioni differenziabili: la pendenza del grafico di una funzione f in un punto di differenziabilità (x0,y0) nella direzione v è data da

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o,y_o)=<\nabla f(x_o,y_o),v>$$

2) Se il gradiente non è nullo, considero l'angolo $\theta$ compreso tra i vettori v e $\nabla f(x_o,y_o)$ e si ha:

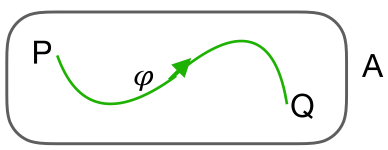
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_o,y_o)=\lvert\nabla f(x_o,y_o)\rvert\cdot\lvert v\rvert\cos\theta=\lvert\nabla f(x_o,y_o)\rvert\cos\theta$$

3) Di conseguenza la derivata direzionale è MASSIMA quando $\theta$=0, cioè se v è parallelo al gradiente di f: $v=\frac{\nabla f(x_o,y_o)}{\lvert\nabla f(x_o,y_o)\rvert}$

**14.** **Insiemi connessi per archi (Teorema)**

Un insieme $A\subseteq\mathbb{R}^2 aperto$ e non vuoto è connesso se e solo se:

$$\forall P,Q\in A,\underbrace{\exists\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}^2,C^1}_{\text{Arco di curva C1}},/\varphi(a)=P,\varphi(b)=Q\wedge\forall t\in[a,b]\to\varphi(t)\in A$$



15. **Funzioni a gradiente nullo**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A \to \mathbb{R}$ , funzione derivabile in $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$ e connesso<br>2) $\forall (x,y) \in A, \nabla f(x,y) = (0,0)$ |
| Tesi | La funzione f è costante in A |
| Dimostrazione | 1) Siccome il gradiente è sempre nullo, le funzioni f'x e f'y sono costanti, quindi continue e differenziabili in tutto A (per il teorema del differenziale)<br>2) Devo dimostrare che f è costante, cioè che $\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in A, f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$<br>3) Per la definizione di insieme aperto e connesso, in A $\exists \varphi : [a,b] \to A, C^1, / \varphi(a) = (x_1,y_1), \varphi(b) = (x_2,y_2)$<br>4) Considero la funzione $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f(\varphi(t))$<br>5) Per il teorema di derivazione delle funzioni composte, g è derivabile in [a,b] e la derivata vale: $g'(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \qquad \forall t \in [a,b]$<br>6) Ma il gradiente di f è sempre nullo per ipotesi, quindi g ha derivata uguale a 0 su un intervallo, quindi g è costante $g(a) = g(b)$<br>7) Ma se g è costante allora $g(a) = g(b) \Leftrightarrow f(\varphi(a)) = f(\varphi(b)) \Leftrightarrow f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2)$<br>Quindi f è costante in A |

16. Funzioni derivabili 2 volte

| | |
|---|---|
| **Derivate seconde** | Se $f : A \to \mathbb{R}$ derivabile in A con $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$.<br>Le sue derivate sono a loro volta funzioni di 2 variabili definite su A:<br>$f'_x : \underset{(x,y)\ \to\ f'_x(x,y)}{A \to \mathbb{R}} \qquad f'_y : \underset{(x,y)\ \to\ f'_y(x,y)}{A \to \mathbb{R}}$<br>Se queste funzioni sono derivabili, f si dice **derivabile 2 volte** e le derivate seconde sono 4 |
| **Matrice Hessiana** | Le derivate seconde si possono scrivere in una matrice<br>$Hf(x_o,y_o) = \begin{pmatrix} f''_{xx}(x_o,y_o) & f''_{xy}(x_o,y_o) \\ f''_{yx}(x_o,y_o) & f''_{yy}(x_o,y_o) \end{pmatrix}$ |

17. **Teorema di Schwarz**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile 2 volte in $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$.<br>$f''_{xy}$ e $f''_{yx}$ sono funzioni continue in un punto $(x_o,y_o) \in A$ |
| Tesi | $f''_{xy}(x_o,y_o) = f''_{yx}(x_o,y_o)$ |

18. **Funzioni di classe C2** -> se f è derivabile due volte in A e le sue derivate seconde sono continue in A

19. **Derivate di ordine successivo**:

E' possibile definire le derivate k-esime per ogni k∈ℕ. Se queste derivate sono continue vale l'analogo del Teorema di Schwarz per derivate di ordine k

20. **Funzioni di classe Ck** -> se f è derivabile k volte in A e le sue derivate k-esime sono continue in A

21. **Teorema di derivazione delle funzioni composte (Regola della catena)**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2 \, aperto$ 2) $\varphi : I \to A$ con I = intervallo<br>3) f è differenziabile in $(x_o, y_o)$ 4) $\varphi$ è derivabile in $t_0$ con $\varphi(t_0) = (x_o, y_o)$ |
| Tesi | La funzione $g : I \to \mathbb{R}, g(t) = f(\varphi(t))$ è derivabile in $t_0$ e la sua derivata vale:<br>$g'(t_0) = \nabla f(x_o, y_o) \cdot \varphi'(t_0)$ |

**Dimostrazione**

1) Pongo $\varphi(t) = (x(t), y(t)), t \in I$

Devo dimostrare che esiste ed è finito il limite $\lim_{t \to t_0} \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \dfrac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0}$

2) Definisco $\varepsilon(h,k) / B_r(0,0) \to \mathbb{R}$

$$\varepsilon(h,k) = \begin{cases} \boxed{\dfrac{f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) - h \cdot f'_x(x_o, y_o) - k \cdot f'_y(x_o, y_o)}{\sqrt{h^2 + k^2}}} & (h,k) \neq (0,0) \\ 0 & (h,k) = (0,0) \end{cases}$$

3) Per la differenziabilità di f, $*$ -> 0 quindi $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0$

4) Consideriamo $\boxed{h} = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0$ e $\boxed{k} = y(t) - y(t_0) = y(t) - y_0$

5) Ora possiamo scrivere

$$f(x_o + h, y_o + k) - f(x_o, y_o) = h \cdot f'_x(x_o, y_o) + k \cdot f'_y(x_o, y_o) + \underbrace{\sqrt{h^2 + k^2} \cdot \varepsilon(h,k)}_{\boxed{\sigma(\sqrt{h^2 + k^2})}}$$

$\boxed{f(x_o, y_o)}$

6) Sostituiamo in $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \dfrac{f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))}{t - t_0} =$

$$= \frac{1}{t - t_0} \left\{ [x(t) - x(t_0)] \cdot f'_x(x_o, y_o) + [y(t) - y(t_0)] \cdot f'_y(x_o, y_o) + \sqrt{[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2} \cdot \varepsilon([x(t) - x(t_0)], [y(t) - y(t_0)]) \right\}$$

7) Le componenti della curva x(t) e y(t) sono continue e derivabili in $t_0$ quindi:

$$= \underbrace{\boxed{\frac{[x(t) - x(t_0)]}{t - t_0}}}_{\to x'(t_0)} \cdot f'_x(x_o, y_o) + \underbrace{\boxed{\frac{[y(t) - y(t_0)]}{t - t_0}}}_{\to y'(t_0)} f'_y(x_o, y_o) + \boxed{\frac{\sqrt{[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2}}{t - t_0} \cdot \varepsilon(\underbrace{[x(t) - x(t_0)]}_{\to 0}, \underbrace{[y(t) - y(t_0)]}_{\to 0})}$$

8) Per definizione $\varepsilon$ è continua in (0,0) quindi per il Teorema sulla composizione di funzioni continue: $\lim_{(h,k) \to (0,0)} \varepsilon(h,k) = 0 = \varepsilon(0,0)$

9) Considero l'ultimo termine rimasto

$$\frac{\sqrt{[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2}}{t - t_0} = \frac{\sqrt{[x(t) - x(t_0)]^2 + [y(t) - y(t_0)]^2}}{\sqrt{|t - t_0|^2}} \cdot \underbrace{\frac{|t - t_0|}{t - t_0}}_{\text{Limitato tra +1 e -1}} = \sqrt{\left[\underbrace{\boxed{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}}}_{\to x'(t_0)}\right]^2 + \left[\underbrace{\boxed{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}}}_{\to y'(t_0)}\right]^2} \cdot \frac{|t - t_0|}{t - t_0}$$

10) Per il teorema del limite di una funzione infinitesima per una limitata, $*$ -> 0

Quindi $\lim_{t \to t_0} \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = x'(t_0) \cdot f'_x(x_o, y_o) + y'(t_0) \cdot f'_y(x_o, y_o) = \varphi'(t_0) \cdot \nabla f(x_o, y_o)$

22. Massimi e minimi:

| | |
|---|---|
| **Massimo assoluto** | $f(x,y) \le f(x_o,y_o)$ |
| **Minimo assoluto** | $f(x,y) \ge f(x_o,y_o)$ |
| **Massimo relativo** | Se $\exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in B_\delta(x_o,y_o) \cap A \to f(x,y) \le f(x_o,y_o)$ |
| **Minimo relativo** | Se $\exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in B_\delta(x_o,y_o) \cap A \to f(x,y) \ge f(x_o,y_o)$ |

23. **Teorema di Fermat**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A \to \mathbb{R}$ funzione derivabile in un punto $(x_o,y_o)$ interno ad A<br>2) Il punto $(x_o,y_o)$ è un punto di massimo o minimo relativo per f su A |
| Tesi | $\nabla f(x_o,y_o) = (0,0)$ |
| Dimostrazione | 1) Considero $(x_o,y_o)$ punto di massimo relativo (dimostrazione analoga se minimo)<br>2) Per la definizione di massimo relativo $\exists \delta > 0 / \forall (x,y) \in B_\delta(x_o,y_o) \cap A \to f(x,y) \le f(x_o,y_o)$<br>3) Considero la funzione della sola x definita da: $g : (x_o - \delta, x_o + \delta) \to \mathbb{R}$ $g(x) = f(x,y_o) \quad \forall x \in (x_o - \delta, x_o + \delta)$<br>4) Dato che $x_0$ è un punto di massimo per g $g(x_o) = f(x_o,y_o) \ge f(x,y_o) = g(x)$<br>5) Quindi $\exists g'(x_o) = f'_x(x_o,y_o)$<br>6) Ma $g'(x_o) = 0$ perchè g soddisfa le ipotesi del Teorema di Fermat in dimensione 1<br>Quindi $g'(x_o) = 0 = f'_x(x_o,y_o)$<br>(Analogamente si prova la derivata parziale rispetto a y uguale a 0) |

24. **Punti critici (stazionari)**-> punti in cui si annulla il gradiente della funzione f

25. **Punti di sella** -> punti stazionari né di massimo né di minimo relativo

26. **Formula di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A \to \mathbb{R}$ funzione di classe c2(A) con $A \subseteq \mathbb{R}^2 aperto$ 2) $(x_o,y_o) \in A$<br>3) Siano $(x_o + h),(y_o + k) \in A /$ il segmento $(x_o,y_o)(x_o + h, y_o + k) \in A$ |
| Tesi | $\exists \theta \in (0,1) / f(x_o + h, y_o + k) = f(x_o,y_o) + h \cdot f'_x(x_o,y_o) + k \cdot f'_y(x_o,y_o) +$ $+\frac{1}{2}\left[h^2 \cdot f''_{xx}(x_o + \theta \cdot h, y_o + \theta \cdot k) + 2 \cdot h \cdot k \cdot f''_{xy}(x_o + \theta \cdot h, y_o + \theta \cdot k) + k^2 \cdot f''_{yy}(x_o + \theta \cdot h, y_o + \theta \cdot k)\right]$ |
| Dimostrazione | La dimostrazione si basa sulla formula di Taylor al primo ordine con resto di Lagrange per funzioni di una sola variabile:<br>Data $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ derivabile 2 volte in [0,1],<br>$\forall t \in (0,1), \exists \theta \in (0,1) / F(t) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2} F''(\theta)$<br>1) Applichiamo questo risultato alla funzione $F(t) = f(x_o + t \cdot h, y_o + t \cdot k) \quad 0 \le t \le 1$<br>in particolare $F(0) = (x_o,y_o)$ e $F(1) = (x_o + h, y_o + k)$ |

**Dimostrazione**

2) Siccome f è di classe C2 è anche di classe C1, quindi differenziabile.
Per il teorema di derivazione delle funzioni composte allora F è derivabile e vale:

$$F'(t)=h\cdot f'_x(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+k\cdot f'_y(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)$$
$$F'(0)=h\cdot f'_x(x_o,y_o)+k\cdot f'_y(x_o,y_o)$$

3) Anche f'x e f'y sono derivabili con derivata continua, quindi posso derivare ulteriormente

$$F''(t)=h^2\cdot f''_{xx}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+$$
$$+h\cdot k\cdot f''_{yx}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)$$

4) applico il Teorema di Schwarz -> f"xy=f"yx

$$F''(t)=h^2\cdot f''_{xx}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o+t\cdot h,y_o+t\cdot k)$$
$$F''(0)=h^2\cdot f''_{xx}(x_o,y_o)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o,y_o)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o,y_o)$$

5) Scrivo la formula di Mac Laurin con resto di Lagrange per F per t = 1

$$\exists\theta\in(0,1)\,/\,F(1)=F(0)+F'(0)+\frac{1}{2}F''(\theta)$$

Sostituisco e diventa:

$$f(x_o+h,y_o+k)=f(x_o,y_o)+h\cdot f'_x(x_o,y_o)+k\cdot f'_y(x_o,y_o)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[h^2\cdot f''_{xx}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)\right]$$

## 27. Formula di Taylor al secondo ordine con resto di Peano

**Ipotesi**

1) $f:A\to\mathbb{R}$ funzione di classe c2(A) con $A\subseteq\mathbb{R}^2$ *aperto* 2) $(x_o,y_o)\in A$

2) $(h,k)\in B_r(0,0)$

**Tesi**

$$f(x_o+h,y_o+k)=f(x_o,y_o)+h\cdot f'_x(x_o,y_o)+k\cdot f'_y(x_o,y_o)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[h^2\cdot f''_{xx}(x_o,y_o)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o,y_o)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o,y_o)\right]+\sigma(h^2+k^2)$$

**Dimostrazione**

1) Dal teorema sulla formula di Taylor al primo ordine abbiamo

$$f(x_o+h,y_o+k)=f(x_o,y_o)+h\cdot f'_x(x_o,y_o)+k\cdot f'_y(x_o,y_o)+$$
$$+\frac{1}{2}\left[h^2\cdot f''_{xx}(x_o,y_o)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o,y_o)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o,y_o)\right]+R(h,k)$$

Con

$$R(h,k)=\frac{1}{2}\left[h^2\cdot f''_{xx}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[h^2\cdot f''_{xx}(x_o,y_o)+2\cdot h\cdot k\cdot f''_{xy}(x_o,y_o)+k^2\cdot f''_{yy}(x_o,y_o)\right]$$

2) Devo dimostrare che $\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{R(h,k)}{h^2+k^2}=0$

3) $$\frac{R(h,k)}{h^2+k^2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{h^2}{h^2+k^2}\overbrace{\left[\underbrace{f''_{xx}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)}_{\boxed{f''_{xx}(x_o,y_o)}}-f''_{xx}(x_o,y_o)\right]}^{0}+\right.$$

Perché le derivate 2 di f sono continue

$$\left.+\frac{2\cdot h\cdot k}{h^2+k^2}\overbrace{\left[\underbrace{f''_{xy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)}_{\boxed{f''_{xy}(x_o,y_o)}}-f''_{xy}(x_o,y_o)\right]}^{0}+\frac{k^2}{h^2+k^2}\overbrace{\left[\underbrace{f''_{yy}(x_o+\theta\cdot h,y_o+\theta\cdot k)}_{\boxed{f''_{yy}(x_o,y_o)}}-f''_{yy}(x_o,y_o)\right]}^{0}\right\}$$

| | |
|---|---|
| Dimostrazione | 4) Considerando le seguenti uguaglianze: $0 \le \dfrac{h^2}{h^2+k^2} \le 1, -1 \le \dfrac{2\cdot h\cdot k}{h^2+k^2} \le 1, 0 \le \dfrac{k^2}{h^2+k^2} \le 1$ (funzioni limitate)<br><br>5) Il risultato del limite (considerando il prodotto di una funzione limitata per una infinitesima) diventa: $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \dfrac{R(h,k)}{h^2+k^2} = 0$ Cioè: $R(h,k) = \sigma(h^2+k^2)$ |

## 28. Criterio di riconoscimento dei punti critici (autovalori)

**Ipotesi**

1) $f : A \to \mathbb{R}$ , $A \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto 2) $(x_o, y_o) \in A$ punto critico di f
3) $\lambda_1$ e $\lambda_2$ autovalori della matrice Hessiana di f

**Tesi**

a) se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ -> Il punto critico è un punto di MASSIMO relativo
b) se $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ -> Il punto critico è un punto di MINIMO relativo
c) se $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$ -> Il punto critico è un punto di SELLA
d) se $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ -> Il criterio è inefficace

**Dimostrazione**

1) Considero la formula di Taylor con resto di Peano

$$f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o, y_o) = \frac{1}{2} q(h,k) + \sigma(h^2+k^2) \quad \text{con} \quad q(h,k) = (h,k)\cdot Hf(x_o,y_o)\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$$

2) Il punto (a) e il punto (b) si dimostrano in maniera analoga, considero quindi il:

Punto (b) $\quad 0 < \lambda_1 < \lambda_2 \qquad q(h,k) > \lambda_1(h^2+k^2)$

$$f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o, y_o) > \frac{1}{2}\lambda_1(h^2+k^2) + \sigma(h^2+k^2) = (h^2+k^2)\left[\frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{\sigma(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)}\right]$$

Quindi $\exists \delta > 0 / \forall (h,k) \in B_\delta(0,0) \quad \dfrac{1}{2}\lambda_1 + \dfrac{\sigma(h^2+k^2)}{(h^2+k^2)} > 0$ $\quad \boxed{(h,k)\to(0,0)} \quad \dfrac{1}{2}\lambda_1 > 0$

Di conseguenza $f(x_o+h, y_o+k) - f(x_o, y_o) > 0$ per definizione è un minimo.

Punto (c) $\quad \lambda_1 < 0 < \lambda_2$

$$\exists v_1, v_2 \ne (0,0) / \forall t \in \mathbb{R} \quad q(t\cdot v_1) = \lambda_1 \cdot t^2 \cdot |v_1|^2 \quad q(t\cdot v_2) = \lambda_2 \cdot t^2 \cdot |v_2|^2$$

Per le formule di Taylor: $\forall i = 1,2$

$$f(x_o + t\cdot v_i, y_o + t\cdot v_i) - f(x_o, y_o) = \frac{1}{2} q(t\cdot v_i) + \sigma(t^2\cdot|v_i|^2) = (t^2\cdot|v_i|^2)\left[\frac{1}{2}\lambda_i + \frac{\sigma(t^2\cdot|v_i|^2)}{(t^2\cdot|v_i|^2)}\right]$$

Quindi $\exists \delta_1, \delta_2 > 0 /$ $\quad \boxed{t \to 0} \quad \dfrac{1}{2}\lambda_i > 0$

$$f(x_o + t\cdot v_i, y_o + t\cdot v_i) - f(x_o, y_o) > 0 \qquad \forall t \in (-\delta_1, +\delta_1), t \ne 0$$
$$f(x_o + t\cdot v_i, y_o + t\cdot v_i) - f(x_o, y_o) < 0 \qquad \forall t \in (-\delta_2, +\delta_2), t \ne 0$$

Di conseguenza il punto non è né di massimo e né di minimo, è di sella.

Punto (d) $\quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0$

Considero 3 funzioni avente tutte matrice Hessiana nulla e un unico punto critico in (0,0)

$f_1(x,y) = x^4 + y^4$ Minimo
$f_2(x,y) = -x^4 - y^4$ Massimo
$f_3(x,y) = x^4 - y^4$ Sella

29. <u>**Secondo criterio di riconoscimento dei punti critici (matrice Hessiana)**</u>

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : A \to \mathbb{R}$ funzione di classe C2 2) $(x_o, y_o) \in A$ punto critico di f |
| Tesi | a) Se $\det Hf(x_o, y_o) > 0$ e $f''_{xx}(x_o, y_o) > 0$ -> Il punto critico è un MINIMO relativo<br>b) Se $\det Hf(x_o, y_o) > 0$ e $f''_{xx}(x_o, y_o) < 0$ -> Il punto critico è un MASSIMO relativo<br>c) Se $\det Hf(x_o, y_o) < 0$ -> Il punto critico è una SELLA<br>d) Se $\det Hf(x_o, y_o) = 0$ -> Il criterio è inefficace |
| Dimostrazione | 1) Considero gli autovalori della matrice Hessiana $\lambda_1$ e $\lambda_2$<br>2) Sapendo che $\det Hf(x_o, y_o) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$<br>$= f''_{xx}(x_o, y_o) \cdot f''_{yy}(x_o, y_o) - \left[ f''_{xy}(x_o, y_o) \right]^2$<br>a) Significa che gli autovalori hanno lo stesso segno e $\lambda_1 + \lambda_2 = f''_{xx}(x_o, y_o) + f''_{yy}(x_o, y_o) > 0$<br>Quindi gli autovalori sono entrambi positivi<br>b) Significa che gli autovalori hanno lo stesso segno e $\lambda_1 + \lambda_2 = f''_{xx}(x_o, y_o) + f''_{yy}(x_o, y_o) < 0$<br>Quindi gli autovalori sono entrambi negativi<br>c) Significa che gli autovalori hanno segno diverso<br>d) Significa che il prodotto degli autovalori è nullo<br>La tesi segue quindi dal 1 criterio di riconoscimento dei punti critici. |

30. **Criterio dei minori di nord-ovest**

Data una matrice Hessiana M = n x n $M = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ con autovalori: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$

Considero i suoi minori

$$M_1 = a_{11} \qquad M_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad M_3 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \cdots \qquad M_n = \det M$$

Valgono le seguenti *condizioni necessarie e sufficienti*:

a) Se tutti i minori sono > 0 allora gli autovalori sono tutti > 0 -> il punto critico è un MINIMO relativo

$$M_i > 0, \forall i = 1, \ldots n \Leftrightarrow 0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

b) Se i minori sono > 0 e < 0 ma il primo M1 < 0 allora gli autovalori sono tutti < 0 -> il punto è un MASSIMO

$$(-1)^i M_i > 0, \forall i = 1, \ldots n \Leftrightarrow \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n < 0$$

c) Se il determinante di M è diverso da 0 e non valgono le condizioni precedenti allora gli autovalori sono discordi -> il punto è di SELLA

$$\det M = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n \neq 0 \Rightarrow \lambda_j < 0 < \lambda_k$$

# ANALISI II - PARTE 3

C. SUCCESSIONI E SERIE DI FUNZIONI

1. **Successione di funzioni** -> funzione che ad ogni n associa una funzione fn appartenente all'insieme delle funzioni $\mathfrak{I} = f : I \to \mathbb{R}$ ovvero $(f_n)_{n \in N} : \underset{n}{\mathbb{N}} \underset{\to}{\to} \underset{f_n : I \to \mathbb{R}}{\mathfrak{I}}$
2. Convergenza delle successioni:

| | |
|---|---|
| **Puntuale** | Se $\forall x \in A, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$<br>Ovvero se $\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon, x) / \forall n > \bar{n} \Rightarrow \lvert f_n(x) - f(x) \rvert < \varepsilon$ (definizione usando la definizione di limite)<br>**Insieme di convergenza puntuale:** $J = \left\{ x \in I / \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \right\}$<br>**Funzione limite**: $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in J$ |
| **Uniforme** | Graficamente la successione converge uniformemente ad f in A se ∀ε>0 esiste un n' per il quale il grafico di tutte le funzioni fn a partire da quel n' sono contenute nell'intorno Bε(f) del grafico di f<br>Vale la seguente catena di definizioni equivalenti:<br>$f_n \overset{n\to\infty}{\to} f$ Uniformemente in A<br>$\Updownarrow$<br>$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) / \forall n > \bar{n} \Rightarrow \lvert f_n(x) - f(x) \rvert < \varepsilon, \forall x \in A$<br>$\Updownarrow$<br>$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) / \forall n > \bar{n} \Rightarrow \sup_{x\in A} \lvert f_n(x) - f(x) \rvert \le \varepsilon$<br>$\Updownarrow$<br>$\lim_{n\to\infty} [\sup_{x \in A} \lvert f_n(x) - f(x) \rvert] = 0$ |

3. **Continuità del limite**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f_n : A \to \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ successioni di funzioni continue in $x_0 \in A$<br>2) Successione convergente uniformemente ad f in A |
| Tesi | La funzione f è continua in $x_0$ |

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in A$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 / \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A \to \lvert f(x) - f(x_0) \rvert < \varepsilon$$

$$\forall n \in N, \exists \delta_n = \delta_n(\frac{\varepsilon}{3}) / \forall x \in (x_0 - \delta_n, x_0 + \delta_n) \cap A \to \lvert f_n(x) - f_n(x_0) \rvert < \frac{\varepsilon}{3}$$

$$\exists \bar{n} = \bar{n}(\frac{\varepsilon}{3}) / \forall n > \bar{n} \to \lvert f_n(x) - f(x_0) \rvert < \frac{\varepsilon}{3}, \forall x \in A$$

$$\delta(\varepsilon) = \delta_m(\frac{\varepsilon}{3})$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap A$$

$$\lvert f(x) - f(x_0) \rvert = \lvert f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0) \rvert \le$$

Per la disuguaglianza triangolare

$$\le \underbrace{\lvert f(x) - f_m(x) \rvert}_{\wedge \frac{\varepsilon}{3} \text{ Per (2)}} + \underbrace{\lvert f_m(x) - f_m(x_0) \rvert}_{\wedge \frac{\varepsilon}{3} \text{ Per (1)}} + \underbrace{\lvert f_m(x_0) - f(x_0) \rvert}_{\wedge \frac{\varepsilon}{3} \text{ Per (2)}} \le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

| | |
|---|---|
| Dimostrazione | Posto devo verificare che:<br><br>1) Fisso $\varepsilon>0$<br>Siccome ogni fn è continua in $x_0$ per ipotesi si ha che:<br><br>2) Siccome fn converge uniformemente a f in A (per ipotesi)<br><br>3) Considero un fissato $m\in\mathbb{N}$, m>n(segnato) e pongo<br>Allora |

4. **Passaggio al limite sotto al segno di integrale**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ successione di funzioni continue<br>2) La successione converge uniformemente a $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ |
| Tesi | $\exists \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ |
| Dimostrazione | 1) Siccome le fn sono continue e la convergenza è uniforme in [a,b]<br>Allora per il teorema sulla continuità del limite la funzione f sarà continua e integrabile<br><br>2) Per la convergenza uniforme $\lim_{n\to\infty}\sup_{t\in[a,b]}\lvert f_n(t)-f(t)\rvert=0$<br>Quindi:<br>$\lvert\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\rvert=\lvert\int_a^b f_n(x)-f(x)\,dx\rvert\le\int_a^b\lvert f_n(x)-f(x)\rvert\,dx\le$<br>$\le\int_a^b\sup_{t\in[a,b]}\lvert f_n(t)-f(t)\rvert dx=(b-a)\sup_{t\in[a,b]}\lvert f_n(t)-f(t)\rvert\xrightarrow{n\to\infty}0$<br><br>Da qui segue che: $\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$ |

5. **Passaggio al limite sotto al segno di derivata**

| | |
|---|---|
| Enunciato | Data una successione di funzioni $f_n:I\to\mathbb{R}$, con $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo limitato,<br>se valgono le seguenti ipotesi:<br><br>1) $\exists x_0\in I\,/\,\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)=l\in\mathbb{R}$<br><br>2) $\forall n\in\mathbb{N}$ , $f_n(x)$ è derivabile in I<br><br>3) La successione $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione $g:I\to\mathbb{R}$<br><br>-> Allora la successione $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente ad una funzione<br>$f:I\to\mathbb{R}$ derivabile in I e $\forall x\in I, f'(x)=g(x)$ |

<u>Oss</u>. $f'(x)=g(x)\Leftrightarrow\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)'=\lim_{n\to\infty}f'_n(x)$

6. **Serie di funzioni** -> $\sum_{n=1}^{\infty}f_n$ successione (di funzioni) delle somme parziali $s_n:I\to\mathbb{R}$ $\quad s_n(x)=\sum_{k=1}^{n}f_k(x)$

**Insieme di convergenza puntuale:** $E=\{x\in I\,/\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x) converge\}$

$f:E\to\mathbb{R}$ $\quad f(x)=\lim_{n\to\infty}s_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$

**Somma della serie:** data una funzione , la somma è data da

7. Convergenza di una serie di funzioni:

| | |
|---|---|
| **Puntuale** | Se, considerato $A \subseteq I$ , la successione delle somme parziali $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge puntualmente ad f in A |
| **Uniforme** | Se la successione delle somme parziali converge uniformemente ad f in A.<br>Ovvero se $\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in A} \lvert s_n(x) - f(x) \rvert = 0$ |

N.B. -> Tutti i risultati provati e i teoremi per le successioni di funzioni valgono per le serie di funzioni.
In particolare la convergenza puntuale implica la convergenza uniforme, mentre non vale il viceversa.

**8.** **Continuità della somma**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f_n : I \to \mathbb{R}$ , successione di funzioni continua in $x_0 \in I$<br>2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente ad f in I |
| Tesi | f è continue in $x_0$ |
| Dimostrazione | La successione delle somme parziali è continua in $x_0$ perché formata da funzioni continue in $x_0$ $\quad s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ |

**9.** **Integrazione per serie**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f_n : I \to \mathbb{R}$ , successione di funzioni continua in $I = [a,b]$<br>2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente ad f in I |
| Tesi | f è continua e vale $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ |
| Dimostrazione | 1) La successione delle somme parziali $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ è continua in I e converge uniformemente ad f in I<br><br>Quindi anche f è continua in I per il Teorema della continuità della somma.<br><br>2) Per il teorema sul passaggio al limite sotto segno di integrale<br>$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(x)\,dx$<br>Di conseguenza: $\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$ |

10. **Derivazione per serie**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f_n : I \to \mathbb{R}$ , successione di funzioni derivabili in $I = [a,b]$<br>2) $\exists x_0 \in I \,/\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = l \in \mathbb{R}$ $\qquad$ 3) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente a g in I |
| Tesi | La serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in I ad una funzione f derivabile per cui<br>$f(x_0) = l \qquad f'(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b]$ |
| Dimostrazione | 1) Posto $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$ si ha che: $\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = l$<br><br>2) Ogni Sn è derivabile quindi $s'_n(x) = f'_1(x) + ... + f'_n(x) \quad \forall x \in [a,b]$<br>S'n converge uniformemente a g.<br><br>3) Per il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata applicato a $(Sn)_n$<br>Sn converge uniformemente ad $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ , funzione derivabile e<br>$f'(x) = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ |

11. **Convergenza totale** -> se, data una serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ con $f_n : I \to \mathbb{R}$ , esiste una successione di numeri non negativi $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che

1) $|f_n(x)| \le M_n \quad \forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$

<u>Oppure:</u> $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge totalmente in I $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x)| < +\infty$

12. **Convergenza assoluta** -> per il criterio del confronto se una serie converge totalmente allora anche la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)| < +\infty$

**13. La convergenza totale implica la convergenza assoluta e la convergenza uniforme**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) Data la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ , $f_n : I \to \mathbb{R}$<br>2) La serie converge totalmente in I |
| Tesi | La serie converge uniformemente ed assolutamente in I |
| Dimostrazione | A) La convergenza assoluta è la conseguenza del criterio del confronto<br><br>B) Detta f(x) la somma della serie e Sn(x) la somma parziale n-esima, devo verificare che $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in I} \lvert f(x) - s_n(x) \rvert = 0$<br>1) Data $s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$, quindi $\forall p \geq 1$ $s_{n+p}(x) = f_1(x) + ... + f_{n+p}(x) = s_n(x) + f_{n+1}(x) + ... + f_{n+p}(x)$<br>2) La serie converge totalmente in I, quindi esiste una serie numerica convergente $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < +\infty$ tale che $\forall x \in I, \forall n \in \mathbb{N}$ $\lvert f_n(x) \rvert \leq M_n$<br>Allora $\lvert s_{n+p}(x) - s_n(x) \rvert = \lvert \sum_{k=1}^{p} f_{n+k}(x) \rvert \boxed{\leq} \sum_{k=1}^{p} \lvert f_{n+k}(x) \rvert \leq \sum_{k=1}^{p} M_{n+k}$ Per la disuguaglianza triangolare<br><br>3) Passando al limite per p->∞ si ottiene $\lvert f(x) - s_n(x) \rvert = \lim_{p\to\infty} \lvert s_{n+p}(x) - s_n(x) \rvert \leq \lim_{p\to\infty} \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} = \sum_{k=1}^{p} M_{n+k}$<br>4) $\forall x \in I$ , quindi $\sup_{x\in I} \lvert f(x) - s_n(x) \rvert \leq \sum_{k=1}^{p} M_{n+k} = \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{n} M_k \xrightarrow{n\to\infty} 0$<br>Perché la serie Mn converge |

14. **Serie di potenze** -> sono particolari serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ con $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , della forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$
**Centro** della serie = $x_0$ **Coefficienti** = $a_n \in \mathbb{R}$

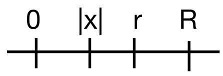
**15. Insieme di convergenza puntuale:** intervallo (limitato o no) centrato nell'origine (es. {0}, [-R,R], (-R,R]…)

**16. Teorema sulla convergenza totale di una serie di potenze**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge in $\overline{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| Tesi | La serie converge totalmente in $[-r, +r]$ $\forall r, 0 < r < \lvert \overline{x} \rvert$ |
| Dimostrazione | 1) Siccome la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}^n$ converge, deve esistere $\lim_{n\to\infty} a_n \overline{x}^n = 0$<br>Quindi $\exists L > 0 / \lvert a_n \overline{x}^n \rvert < L . \forall n \geq 0$<br>2) $\forall x \in [-r, +r]$ si ha: $\lvert a_n x^n \rvert = \lvert a_n \rvert \cdot \lvert x \rvert^n \leq \lvert a_n \rvert \cdot r^n \cdot \frac{\lvert \overline{x} \rvert^n}{\lvert \overline{x}^n \rvert} = \lvert a_n \overline{x}^n \rvert \cdot \frac{r^n}{\lvert \overline{x}^n \rvert} \leq L \cdot \left( \frac{r}{\lvert \overline{x} \rvert} \right)^n$<br>3) Posto $M_n = L \cdot \left( \frac{r}{\lvert \overline{x} \rvert} \right)^n$<br>La serie $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge perché $r < \lvert \overline{x} \rvert$<br>Quindi la serie di potenze converge totalmente in $[-r, +r]$ (per il criterio del confronto) |

17. **Raggio di convergenza:** $R = \sup\{x \in \mathbb{R} / \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, converge\} \in [0, +\infty]$ perché la serie converge almeno per x=0

## 18. Teorema sull'insieme di convergenza

| | |
|---|---|
| Ipotesi | R = raggio di convergenza di una serie di potenze |
| Tesi | (i) Se **R=0** -> la serie converge solo per x=0<br><br>(ii) Se **0<R<+∞** -> la serie converge assolutamente $\forall x \in (-R, R)$,<br>non converge per alcun x, \|x\| >R e converge totalmente in [-a,a] $\forall a \in (0, R)$<br><br>(iii) Se **R=+∞** -> la serie converge assolutamente in x, $\forall x \in \mathbb{R}$, e totalmente in [-a,a] $\forall a > 0$ |
| Dimostrazione | (i) Per il teorema sulla convergenza totale di una serie di potenze:<br>Se $\exists \bar{x} \neq 0 / \sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}^n converge$ allora la serie converge anche in $(-\|\bar{x}\|, \|\bar{x}\|)$<br>Quindi $0 < \|\bar{x}\| \leq R$<br><br>(ii) **1)** Consideriamo un qualunque $x \in (-R, R)$<br>Siccome \|x\| < R (per definizione di estremo superiore), $\exists r, \|x\| < r \leq R / \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n converge$<br>Allora la serie converge assolutamente in $(-r, r)$, quindi anche in x.<br>**2)** Analogamente, $\forall a \in (0, R)$, $\exists r, a < r \leq R / \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n converge$<br>Allora la serie converge totalmente in $[-a, a]$.<br>**3)** Verifichiamo per assurdo che la serie non può convergere in nessun x con \|x\| > R.<br>Se la serie convergesse in un $\bar{x}, \bar{x} > R$, allora convergerebbe in ogni punto di $(-\|\bar{x}\|, \|\bar{x}\|)$<br>e sarebbe $R \geq \bar{x} > R$ ma contro le ipotesi, quindi assurdo.<br>(iii) Per il teorema sulla convergenza totale di una serie: $\forall a > 0, \exists x > a / \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n converge$<br>Allora la serie converge totalmente in $[-a, a]$.<br>Considerato un qualunque $x \in \mathbb{R}$ con $x \in [-a, a]$ per qualunque a > 0<br>Quindi la serie converge assolutamente in x. |

## 19. Teorema di Abel

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze 2) Raggio di convergenza $R \in (0, +\infty)$ |
| Tesi | A) Se la serie converge per **x = R**<br>La serie di potenze converge uniformemente in [-a,R] $\forall a \in (0, R)$<br><br>B) Se la serie converge per **x = -R**<br>La serie di potenze converge uniformemente in [-R,a] $\forall a \in (0, R)$<br><br>C) Se la serie converge per **x = -R e x = R**<br>La serie di potenze converge uniformemente in [-R,R] |

## 20. Teorema di Cauchy - Hadamard (Criterio della radice n-esima)

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze  2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = l \in [0,+\infty]$ |
| Tesi | Il raggio di convergenza della serie vale: $R = \begin{cases} 0 & l = +\infty \\ \frac{1}{l} & l \in (0,+\infty) \\ +\infty & l = 0 \end{cases}$ |
| Dimostrazione | Conseguenza immediata del criterio asintotico della radice.<br>1) Se $l = 0$  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n x^n \rvert} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \cdot \lvert x \rvert = 0 < 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$<br>La serie converge $\forall x \in \mathbb{R}$<br>2) Se $l = +\infty$  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n x^n \rvert} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \cdot \lvert x \rvert = +\infty > 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$<br>La serie non converge $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$<br>3) Se $l \in (0,+\infty)$  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\lvert a_n x^n \rvert} = l \cdot \lvert x \rvert$<br>La serie converge se $l \cdot \lvert x \rvert < 1$<br>La serie non converge se $l \cdot \lvert x \rvert > 1$ |

## 21. Teorema di d'Alembert (Criterio del rapporto)

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze  2) $\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert = l$ |
| Tesi | Il raggio di convergenza della serie vale: $R = \begin{cases} 0 & l = +\infty \\ \frac{1}{l} & l \in (0,+\infty) \\ +\infty & l = 0 \end{cases}$ |

**22. Formula di Stirling:** si utilizza per valutare il comportamento agli estremi del risultato del limite $\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot \sqrt[n]{2\pi n}}{(n!) \cdot e^n} = 1$

## 23. Integrazione di una serie di potenze

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze  2) R = raggio di convergenza  3) I = insieme di convergenza |
| Tesi | $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \quad \forall [a,b] \subset I$ |
| Dimostrazione | Per il teorema di Abel, la serie converge uniformemente in [a,b]<br>Quindi vale il teorema di integrazione per serie: $\int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b a_n x^n \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \cdot a_n$ |

24. **Serie derivata** -> serie di potenze ottenuta derivando termine a termine $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n$

## 25. Raggio di convergenza della serie derivata

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze 2) $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \cdot a_{n+1} x^n$ serie derivata |
| Tesi | Entrambe le serie hanno lo stesso raggio di convergenza |
| Dimostrazione | 1) Considero il caso in cui i coefficienti della serie verifichino $\exists \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} \in [0, +\infty]$<br>2) Dato che i coefficienti della serie derivata sono $(n \cdot a_n)$<br>Si ha che: $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert n \cdot a_n \rvert} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert}$<br>Quindi $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert a_n \rvert} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\lvert n \cdot a_n \rvert}$<br>e per il teorema della radice n-esima la serie di partenza ha lo stesso raggio di convergenza della serie derivata. |

## 26. Derivata di una serie di potenze

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze 2) Raggio di convergenza R > 0<br>3) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad x \in (-R, R)$ |
| Tesi | f è derivabile in $(-R, R)$ e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad x \in (-R, R)$ |
| Dimostrazione | 1) Per il teorema sull'insieme di convergenza:<br>$\forall r \in (0, R)$ La serie di partenza converge uniformemente in [-R,R]<br>e la serie derivata converge totalmente, quindi uniformemente in [-r,r]<br>2) Per il teorema di derivazione per serie<br>f(x) è derivabile e $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1} \quad \forall x \in [-r, r]$<br>3) Per l'arbitrarietà di r < R si ha che: $\forall x \in (-R, R) \quad \exists f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ |

## 27. Sviluppabilità in serie di Taylor della somma di una serie di potenze

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serie di potenze 2) Raggio di convergenza R > 0 |
| Tesi | La somma è derivabile infinite volte in $(-R, R)$ e vale:<br>$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) \cdot a_n x^{n-m} \quad \forall x \in (-R, R)$<br>Inoltre $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ |

<table>
<tr>
<td>Dimostrazione</td>
<td>1) La formula della derivata m-esima si ottiene applicando m volte il teorema di derivazione di una serie di potenze<br>
$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(0)=a_0$<br>
$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n x^{n-1} \Rightarrow f'(0)=a_1$<br>
$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdot a_n x^{n-2} \Rightarrow f''(0)=a_2$<br>
$\vdots$<br>
$f^{(m)}(x)=\sum_{n=m}^{\infty} n\cdot(n-1)\cdots(n-m+1)\cdot a_n x^{n-m} \Rightarrow f^{(m)}(0)=\overbrace{m\cdot(m-1)\cdots 2\cdot 1}^{\boxed{m!}}\cdot a_m$<br>
2) Ricordando i coefficienti $(a_m)_n$ : $a_m=\dfrac{f^{(m)}(0)}{m!} \quad \forall m\in\mathbb{N}$</td>
</tr>
</table>

28. **Criterio per la sviluppabilità in serie di Taylor**

Data $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ , funzione derivabile infinite volte in (a,b) e $\exists L,M>0,\delta>0 / (x_0-\delta,x_0+\delta)\subset(a,b)$ e $|f^{(n)}(x)|\le L\cdot M^n \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta) \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Allora f è sviluppabile in serie di Taylor in $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ per cui $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$

29. **Sviluppo in serie di Mac Laurin** -> Sviluppo in serie di Taylor ma con $x_0 = 0$

30. Serie di Taylor e di Mac Laurin di **funzioni elementari**

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ | $\forall x\in(-1,1)$ | $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ |
| $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$ | $\forall x\in(-1,1]$ | $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | $\forall x\in[-1,1]$ |
| $\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ | $\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $\forall x\in\mathbb{R}$ |

31. **Serie trigonometrica**: serie di funzione della forma $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos nx+b_n\sin nx]$

<u>Coefficienti</u> : $a_n\in\mathbb{R}, n\ge 0 \quad b_n\in\mathbb{R}, n\ge 1$

32. **Polinomi trigonometrici**: somme parziali della serie trigonometrica $s_n(x)=a_0+\sum_{k=1}^{m}[a_n\cos kx+b_n\sin kx]$ (funzione $2\pi-periodica$ )

**33.** **Convergenza totale di una serie trigonometrica**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | $a_n \in \mathbb{R}, n \geq 0$ e $b_n \in \mathbb{R}, n \geq 1$ termini generali di 2 serie assolutamente convergenti<br>$\sum_{n=0}^{\infty} \lvert a_n \rvert < +\infty \quad \sum_{n=1}^{\infty} \lvert b_n \rvert < +\infty$ |
| Tesi | La serie trigonometrica $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos nx + b_n \sin nx]$ converge totalmente in $\mathbb{R}$ |
| Dimostrazione | 1) $\forall x \in \mathbb{R}$ e $\forall n \in \mathbb{N}$<br>$\lvert f_n(x) \rvert = \lvert a_n \cos nx + b_n \sin nx \rvert \leq \lvert a_n \cos nx \rvert + \lvert b_n \sin nx \rvert \leq \lvert a_n \rvert + \lvert b_n \rvert$<br>2) La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(\lvert a_n \rvert + \lvert b_n \rvert)$ è convergente perché somma di serie convergenti<br>Quindi la serie trigonometrica converge totalmente in $\mathbb{R}$ |

34. Definizione relative a funzioni 2π-periodiche continue

| | |
|---|---|
| **Prodotto scalare** | $< f,g >= \int_0^{2\pi} f(x) \bullet g(x)dx$ |
| **Norma quadratica** | $\lVert f \rVert = \left(\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$ |
| **Sistema ortonormale nello spazio** | $S = \left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, n \in \mathbb{N}\right\}$<br><u>Dim:</u><br>(Dimostriamo che le 3 funzioni sono di norma 1 e ortogonali a 2 a 2)<br>1) Studio della norma<br>$\lVert \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \rVert^2 = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{2\pi}dx = 1$<br>$\lVert \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx \rVert^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos^2(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(2nx)+1}{2}dx = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{2n}\sin(2nx)+x\right]_{-\pi}^{+\pi} = 1$<br>$\lVert \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \rVert^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin^2(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}1-\cos^2(nx)dx = 1$<br>2) Verifico che siano ortogonali a 2 a 2 (prodotto scalare nullo)<br>$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)dx = 0 \qquad < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(nx)dx = 0$<br>$\forall n,m \in \mathbb{N}$<br>$< \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\cdot\sin(mx)dx = 0$<br>$< \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}} >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos(nx)\cdot\cos(mx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(n-m)+\cos(n+m)}{2}dx = 0$<br>$< \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\sin(nx)\cdot\sin(mx)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(n-m)-\cos(n+m)}{2}dx = 0$ |

35. **Serie di Fourier**: serie trigonometrica data da una funzione 2π-periodica integrabile [-π,+π]

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos nx + b_n \sin nx]$$

**Coefficienti:**

$$\boxed{a_0} =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)dx = \boxed{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x)dx}$$

$$\boxed{a_n} =< f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} > \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \cos(nx) dx} \qquad \boxed{b_n} =< f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} > \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} = \boxed{\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x) \cdot \sin(nx) dx}$$

36. **Teorema sulla convergenza in norma quadratica della serie di Fourier**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , funzione 2π-periodica 2) Funzione f Reimann integrabile in [-π,+π] |
| Tesi | La serie di Fourier converge ad f in norma quadratica.<br>Quindi posto $s_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{m} [a_n \cos kx + b_n \sin kx]$<br>Si ha: $\lim_{n\to\infty} \| f(x) - s_n(x) \| = \lim_{n\to\infty} \left( \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - s_n(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0$ |

37. **Identità di Parseval ->** $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx = 2\pi \cdot a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$

38. **Teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione continua a tratti<br>2) In $x_0 \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0^-)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ $\exists \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0^+)}{x - x_0} \in \mathbb{R}$ |
| Tesi | La serie di Fourier converge in $x_0$ al valore $\frac{f(x_0^-) + f(x_0^-)}{2}$ |

39. **Teorema sulla convergenza uniforme della serie di Fourier**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione 2π-periodica e C1 a tratti |
| Tesi | La serie di Fourier converge totalmente, infatti: $\sum_{n=0}^{\infty} \| a_n \| < +\infty$ $\sum_{n=1}^{\infty} \| b_n \| < +\infty$ |

# ANALISI II - PARTE 4

## D. EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

1. Equazione differenziale:

| | |
|---|---|
| **Ordinaria di ordine n** | Equazione che ha come incognita una funzione di una variabile reale nella forma: $F(t, x(t), x'(t) \dots, x^n(t)) = 0$ |
| **Soluzione** | Funzione $x: I \to \mathbb{R}$ con $I \subseteq \mathbb{R}$, intervallo.<br>La funzione è n volte derivabile in I tale che $\forall t \in I$ sia verificata l'equazione. |

2. Equazioni del 1 ordine:

| | | |
|---|---|---|
| **Forma implicita** | $F(t, x(t), x'(t)) = 0$ | |
| **Forma normale** | $x' = f(t, x(t))$ | es. **Variabili separabili** $x' = h(t) \cdot g(x)$ |
| **Equazione completa (EC)** | $x'(t) + a(t) \cdot x(t) = b(t)$ | $a, b: I \to \mathbb{R}, continue$ |
| **Equazione omogenea (EO)** | $b(t) = 0, \forall t \in I$ | $x'(t) + a(t) \cdot x(t) = 0$ |

3. **Problema di Cauchy:** $\begin{cases} x' = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ $\longrightarrow$ Condizione iniziale

4. **Teorema di esistenza di Peano**

| | | |
|---|---|---|
| Ipotesi | 1) $f: A \to \mathbb{R}$, funzione continua in A | 2) $A \subseteq \mathbb{R}^2, aperto$ |
| Tesi | $\forall (t_0, x_0) \in A, \exists \delta > 0 \wedge x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R} / \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow (t, x(t)) \in A$ e risolve il problema di Cauchy<br>*Garantisce l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy, ma **non** la sua unicità.* | |

5. **Teorema di esistenza e unicità locale**

| | | |
|---|---|---|
| Ipotesi | 1) $f: A \to \mathbb{R}$, funzione continua in A<br>3) f derivabile rispetto a x | 2) $A \subseteq \mathbb{R}^2, aperto$<br>4) $f_x'(t, x)$ continua in A |
| Tesi | $\forall (t_0, x_0) \in A, \exists \delta > 0 \wedge \underbrace{x: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \to \mathbb{R}}_{\text{funzione unica}} / \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \Rightarrow (t, x(t)) \in A$ e risolve il problema di Cauchy<br>*Garantisce l'esistenza della soluzione del problema di Cauchy e la sua unicità.* | |

6. **Metodo di risoluzione delle equazioni a variabili separabili**

Considero le equazioni della forma $x' = h(t) \cdot g(x)$ (g e h funzioni continue)

**A.** Se $x_0$ è uno zero della funzione g ( $g(x_0) = 0$ ) -> la funzione $x(t) = x_0, \forall t$ è una **soluzione costante**

**B.** Se x(t) è una soluzione per cui $g(x(t)) \neq 0, \forall t$ quindi devo avere $x'(t) = h(t) \cdot g(x(t)) \Leftrightarrow h(t) = \frac{x'(t)}{g(x(t))}$
Avente come **soluzioni non costanti:** $G(x) = H(t) + c, c \in \mathbb{R}$ $\quad G'(x) = \frac{1}{g(x)} \quad H'(t) = h(t)$

Dim:

- Sia H una primitiva di h e G una primitiva di 1\g —> H e G esistono perché h e g sono continue

Quindi: $\frac{d}{dt}G(x(t)) = G'(x(t))\cdot x'(t) = \frac{1}{g(x(t))}\cdot x'(t)$ $\qquad \frac{d}{dt}H(t) = h(t)$

- Di conseguenza $\frac{d}{dt}\left[G(x(t)) - H(t)\right] = \frac{x'(t)}{g(x(t))} - h(t) = 0$
- Se t varia in un intervallo è equivalente a dire che $\left[G(x(t)) - H(t)\right] = \text{costante}$
- Le soluzioni non costanti sono definite implicitamente dall'uguaglianza: $G(x) = H(t) + c, c \in \mathbb{R}$ $\left[\begin{array}{l} G'(x) = \frac{1}{g(x)} \\ H'(t) = h(t) \end{array}\right.$

7. **Integrale generale** -> insieme di tutte le soluzioni dell'equazione

8. **Teorema sull'integrale generale dell'equazione omogenea**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) Data l'equazione omogenea $z'(t) + a(t)\cdot z(t) = 0$ 2) $a: I \to \mathbb{R}$, funzione continua in I |
| Tesi | Le soluzioni sono date da: $z(t) = c\cdot e^{-A(t)}, t \in I$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ con $A'(t) = a(t), \forall t \in I$ |
| Dimostrazione | 1) Per il teorema fondamentale del calcolo integrale: siccome a(t) è una funzione continua in I, ammette una primitiva A(t)<br>2) L'equazione omogenea è a variabili separabili quindi: $z'(t) = -a(t)\cdot z(t)$<br>con $g(z) = z$ $\quad h(t) = -a(t)$<br>3) Soluzioni costanti $g(z) = 0 \Leftrightarrow z(t) = 0, \forall t \in I$<br>4) Soluzioni non costanti, date da $G(z) = H(t) + k, k \in \mathbb{R}$<br>$G(z) = \int \frac{1}{g(z)}dz = \int \frac{1}{z}dz = \log\lvert z\rvert$ $\qquad H(t) = \int -a(t)dt = -A(t)$<br>5) Le soluzioni si ottiengono ricavando z in funzione di t<br>$\log\lvert z\rvert = -A(t) + k \Leftrightarrow \lvert z\rvert = e^{-A(t)+k} = e^k e^{-A(t)}$ $\qquad z(t) = \pm e^k e^{-A(t)}$<br>In particolare: $z(t) = \begin{cases} 0 & = c\cdot e^{-A(t)}, c = 0 \\ e^k e^{-A(t)} & = c\cdot e^{-A(t)}, c = e^k \\ -e^k e^{-A(t)} & = c\cdot e^{-A(t)}, c = -e^k \end{cases}$<br>Tutti i casi sono quindi compresi in $z(t) = c\cdot e^{-A(t)}$ $\quad c \in \mathbb{R}$ |

9. **Teorema sulla rappresentazione dell'integrale generale di (EC)**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) Equazione completa $x'(t) + a(t)\cdot x(t) = b(t)$ 2) $x(t) = z(t) + \bar{x}(t)$<br>3) $\bar{x}: I \to \mathbb{R}$ soluzione particolare di (EC) 4) $z: I \to \mathbb{R}$ soluzione di (EO) |
| Tesi | A. $x(t) = z(t) + \bar{x}(t)$ è una soluzione di EC data da una sol(EO) e una particolare sol(EC)<br>B. $\forall x: I \to \mathbb{R}$ soluzione di (EC), $\exists z: I \to \mathbb{R}$ soluzione di (EO) $/ z(t) + \bar{x}(t) = x(t)$ |
| Dimostrazione (A) | 1) $\bar{x}'(t) + a(t)\cdot \bar{x}(t) = b(t), \forall t \in I$ (per l'ipotesi 3)<br>$z'(t) + a(t)\cdot z(t) = 0, \forall t \in I$ (per l'ipotesi 4)<br>2) Sostituisco l'ipotesi 2 nella (EC)<br>$x'(t) + a(t)\cdot x(t) = z'(t) + \bar{x}'(t) + a(t)\cdot\left(z(t) + \bar{x}(t)\right) = \underbrace{z'(t) + a(t)\cdot z(t)}_{=0} + \underbrace{\bar{x}'(t) + a(t)\cdot \bar{x}(t)}_{=b(t)} = b(t)$<br>Quindi $x(t) = z(t) + \bar{x}(t)$ è soluzione dell'equazione completa. |

| | |
|---|---|
| Dimostrazione (B) | 1) Sostituisco l'ipotesi 2 nell'equazione omogenea $z'(t)+a(t)\cdot z(t)=x'(t)-\bar{x}'(t)+a(t)\cdot\big(x(t)-\bar{x}(t)\big)$ $=\underbrace{x'(t)+a(t)\cdot x(t)}_{=b(t)}+\underbrace{\bar{x}'(t)+a(t)\cdot\bar{x}(t)}_{=b(t)}=b(t)-b(t)=0$ Quindi z(t) è una soluzione dell'equazione omogenea |

10. **Metodo della variazione delle costanti arbitrarie (Soluzione particolare della (EC))**

Lo scopo è trovare una funzione C(t) derivabile $/\bar{x}(t)=C(t)\cdot e^{-A(t)}$ sia soluzione dell'equazione completa.

1) Derivo la soluzione $\bar{x}(t)=C(t)\cdot e^{-A(t)}$

$$\bar{x}'(t)=C'(t)\cdot e^{-A(t)}+C(t)\cdot(-A'(t))\cdot e^{-A(t)}=C'(t)\cdot e^{-A(t)}-a(t)\cdot C(t)\cdot e^{-A(t)}$$

2) Sostituisco nella completa

$$\bar{x}'(t)+a(t)\cdot\bar{x}(t)=C'(t)\cdot e^{-A(t)}-a(t)\cdot C(t)\cdot e^{-A(t)}+a(t)\cdot C(t)\cdot e^{-A(t)}$$

$$=C'(t)\cdot e^{-A(t)}=b(t)\Leftrightarrow C'(t)=b(t)\cdot e^{A(t)}$$

Quindi: $\bar{x}(t)=B(t)\cdot e^{-A(t)}$ con $B'(t)=b(t)\cdot e^{A(t)}$

11. **Teorema sull'integrale generale dell'equazioni lineari del I ordine (equazione completa)**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) Equazione completa $x'(t)+a(t)\cdot x(t)=b(t)$ 2) $a,b:I\to\mathbb{R}$ funzioni continue in I |
| Tesi | L'insieme delle soluzioni delle equazioni è dato da: $x(t)=e^{-A(t)}\cdot\left[B(t)+c\right]$ $t\in I, c\in\mathbb{R}$ con $A'(t)=a(t)$ $B'(t)=b(t)\cdot e^{A(t)}$ $\forall t\in I$ |
| Dimostrazione | Per il teorema di rappresentazione dell'integrale generale di EC, l'insieme delle soluzioni è dato dalla soluzione dell'equazione omogenea più la soluzione particolare della completa $x(t)=\underbrace{c\cdot e^{-A(t)}}_{\text{int gen}(EO)}+\underbrace{B(t)\cdot e^{-A(t)}}_{sol\_particolare(EC)}$ Quindi: $x(t)=e^{-A(t)}\cdot\left[B(t)+c\right]$ -> *data dalla variazione delle costanti arbitrarie* |

12. Equazioni lineari di ordine n:

| | |
|---|---|
| **Equazione completa** | $x^{(n)}+a_{n-1}(t)x^{(n-1)}+\ldots+a_1(t)x'+a_0(t)x=b(t)$ |
| **Equazione omogenea** | $z^{(n)}+a_{n-1}(t)z^{(n-1)}+\ldots+a_1(t)z'+a_0(t)z=0$ |
| **Integrale generale** | Struttura di uno spazio vettoriale, sottospazio di $C^n(I)$ |

13. **Soluzioni linearmente indipendenti**

Date n funzioni $z_1,z_2,\ldots,z_n:I\to\mathbb{R}$, sono linearmente indipendenti se:

$$\lambda_1 z_1(t)+\lambda_2 z_2(t)+\ldots+\lambda_n z_n(t)=0,\forall t\in I\Leftrightarrow\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

14. **Determinante Wronskiano**

$$W(t)=\det\begin{pmatrix} z_1(t) & \ldots & z_n(t)\\ z_1'(t) & \cdots & z_2'(t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ z_1^{(n-1)}(t) & \cdots & z_n^{(n-1)}(t)\end{pmatrix}$$

15. **Teorema del Wronskiamo (condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza di n soluzioni)**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $z_1, z_2, \ldots, z_n : I \to \mathbb{R}$ n soluzioni dell'equazione omogenea<br>2) W(t) = determinante Wronskiano associato alle soluzioni |
| Tesi | Le soluzioni sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow W(t) \neq 0, \forall t \in I$ |

16. **Integrale generale dell'equazione omogenea**

Spazio vettoriale di dimensione n centrato in $C^n(I)$ il cui elemento neutro è la funzione costantemente uguale a 0.

Considerate n soluzioni linearmente indipendenti $z_1, z_2, \ldots, z_n : I \to \mathbb{R}$, $\forall z(t) soluzione (EO)$

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} / z(t) = \lambda_1 \cdot z_1(t) + \lambda_2 \cdot z_2(t) + \ldots + \lambda_n \cdot z_n(t), t \in I$$

17. **Integrale generale dell'equazione completa**

Si ottiene sommando all'integrale generale dell'omogenea (EO) una soluzione particolare della completa (EC). Date n soluzioni linearmente indipendenti di (EO) e una soluzione $\bar{x} : I \to \mathbb{R}$ di (EC), tutte le soluzioni di (EC) sono date da: $x(t) = \lambda_1 \cdot z_1(t) + \lambda_2 \cdot z_2(t) + \ldots + \lambda_n \cdot z_n(t) + \bar{x}(t) \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

18. **Equazioni lineari del II ordine ->** $x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t)$

| | |
|---|---|
| **Equazione completa** | Se $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ **(coefficienti costanti)** e $b : I \to \mathbb{R}, continua$ -> $x'' + a_1 x' + a_0 x = b(t)$ |
| **Equazione omogenea** | $z'' + a_1 z' + a_0 z = 0$ |
| **Equazione caratteristica** | $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$ (Non sempre ammette 2 soluzioni reali distinte) |

19. **Integrale generale dell'equazione omogenea**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) Equazione omogenea di un'equazione lineare di 2 ordine $z'' + a_1 z' + a_0 z = 0$<br>2) $\Delta = a_1^2 - 4 \cdot a_0$ |
| Tesi | L'insieme delle soluzioni delle equazioni è dato da: $\{x(t) = c_1 z_1(t) + c_2 z_2(t) / c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$ dove z1 e z2 sono definite da:<br>A. Se $\Delta > 0$ -> l'equazione ammette 2 soluzioni reali $\lambda_1 \neq \lambda_2 / \; z_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \; z_2(t) = e^{\lambda_2 \cdot t}$<br>B. Se $\Delta = 0$ -> l'equazione ammette 1 soluzione reale / $z_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t} \quad z_2(t) = t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}$<br>C. Se $\Delta < 0$ -> l'equazione ammette 2 soluzioni complesse coniugate $p = \pm i \cdot q$<br>$z_1(t) = e^{p \cdot t} \cos(q \cdot t) \quad z_2(t) = e^{p \cdot t} \sin(q \cdot t)$ |
| Dimostrazione | A. $z_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t}$ e $z_2(t) = e^{\lambda_2 \cdot t}$ sono soluzioni della (EO).<br>Devo dimostrare se non linearmente indipendenti:<br>$W(t) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & e^{\lambda_2 \cdot t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 \cdot t} \end{pmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \neq 0 \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$<br>B. $z_1(t) = e^{\lambda_1 \cdot t}$ è una soluzione dell'equazione omogenea. Perché $\lambda_1 = \frac{-a_1}{2}$ Perché $\lambda$ risolve l'eq caratteristica<br>Devo dimostrare che anche Z2 è una soluzione della (EO):<br>$z_2'' + a_1 z_2' + a_0 z_2 = e^{\lambda_1 \cdot t}\left[2\lambda_1 + \lambda_1^2 t + a_1 + a_1 \lambda_1 t + a_0 t\right] = e^{\lambda_1 \cdot t}\left[\underbrace{(2\lambda_1 + a_1)}_{=0} + t\underbrace{(\lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_0)}_{=0}\right] = 0$<br>È soluzione della (EO).<br>Verifico siano linearmente indipendenti: $W(t) = \det\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} & t \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 \cdot t} & (1 + \lambda_1 t) e^{\lambda_1 \cdot t} \end{pmatrix} = e^{2\lambda_1 \cdot t} \neq 0$ |

| | |
|---|---|
| Dimostrazione | C. Usando la definizione di esponenziale in campo complesso si ha:<br>$w_1(t)=e^{(p+iq)t}=e^{p\cdot t}\left[\cos(qt)+i\cdot\sin(qt)\right]$ $\quad w_2(t)=e^{(p-iq)t}=e^{p\cdot t}\left[\cos(qt)-i\cdot\sin(qt)\right]$<br>W1 e W2 sono 2 soluzioni a valori complessi della (EO) e ogni loro combinazione lineare sarà ancora una soluzione, in particolare:<br>$z_1(t)=\frac{w_1(t)+w_2(t)}{2}=e^{p\cdot t}\cos(qt)$ $\quad z_2(t)=\frac{w_1(t)-w_2(t)}{2}=e^{p\cdot t}\sin(qt)$<br><br>Verifico che siano anche linearmente indipendenti:<br>$z_1'(t)=e^{p\cdot t}\left[p\cdot\cos(qt)-q\cdot\sin(qt)\right]$ $\quad z_2'(t)=e^{p\cdot t}\left[p\cdot\cos(qt)+q\cdot\sin(qt)\right]$<br>$W(t)=\det\begin{pmatrix} e^{p\cdot t}\cos(qt) & e^{p\cdot t}\sin(qt) \\ e^{p\cdot t}\left[p\cdot\cos(qt)-q\cdot\sin(qt)\right] & e^{p\cdot t}\left[p\cdot\cos(qt)+q\cdot\sin(qt)\right]\end{pmatrix}=$<br>$=e^{2p\cdot t}\left(q\cdot\cos^2(qt)+q\cdot\sin^2(qt)\right)=qe^{2p\cdot t}\neq 0$ Perché $q=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}>0$<br><br>*Qualsiasi sia il valore del discriminante dell'equazione caratteristica riusciamo a determinare due soluzioni linearmente indipendenti di (EO)* |

20. **Metodo della verosimiglianza (soluzione particolare della completa)**

| | | |
|---|---|---|
| $b(t)=polinomio$ | - Se $a_0\neq 0$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=At^m+Bt^{m-1}+\ldots+Et+F$ |
| | - Se $a_0=0\wedge a_1\neq 0$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=t(At^m+Bt^{m-1}+\ldots+Et+F)$ |
| | - Se $a_0=a_1=0$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=t^2(At^m+Bt^{m-1}+\ldots+Et+F)$ |
| $b(t)=P(t)\cdot e^{\alpha\cdot t}$<br>$P(t)=polinomio$ | - Se $\alpha\neq soluzione(Eq.Caratterisctica)$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=e^{\alpha\cdot t}(At^m+Bt^{m-1}+\ldots+Et+F)$ |
| | - Se $\alpha=soluzione(Eq.Caratterisctica)$<br>Con molteplicità $k=1,2$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=t^k\cdot e^{\alpha\cdot t}(At^m+Bt^{m-1}+\ldots+Et+F)$ |
| $b(t)=b_1\cos\beta t+b_2\sin\beta t$ | - Se $i\beta\neq soluzione(Eq.Caratterisctica)$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=A\cos\beta t+B\sin\beta t$ |
| | - Se $i\beta=soluzione(Eq.Caratterisctica)$ | $\Rightarrow \bar{x}(t)=t(A\cos\beta t+B\sin\beta t)$ |

**21. Metodo della variazione delle costanti arbitrarie**

Data la (EC) di 2 ordine: $x''+a_1x'+a_0x=b(t)$ e 2 soluzioni linearmente indipendenti Z1(t) e Z2(t) della (EO).

Cerco una soluzione particolare della completa della forma: $\bar{x}(t)=C_1(t)\cdot z_1(t)+C_2(t)\cdot z_2(t)$

1) Calcolo la derivata prima $\bar{x}'(t)=C_1'(t)\cdot z_1(t)+C_1(t)\cdot z_1'(t)+C_2'(t)\cdot z_2(t)+C_2(t)\cdot z_2'(t)$

2) Impongo $C_1'(t)\cdot z_1(t)+C_2'(t)\cdot z_2(t)=0$ quindi $\bar{x}'(t)=C_1(t)\cdot z_1'(t)+C_2(t)\cdot z_2'(t)$

3) Calcolo la derivata seconda $\bar{x}''(t)=C_1'(t)\cdot z_1'(t)+C_1(t)\cdot z_1''(t)+C_2'(t)\cdot z_2'(t)+C_2(t)\cdot z_2''(t)$

4) Sostituisco nella completa

$$\bar{x}''(t)+a_1\bar{x}'(t)+a_0\bar{x}(t)=C_1'(t)\cdot z_1'(t)+C_1(t)\cdot z_1''(t)+C_2'(t)\cdot z_2'(t)+C_2(t)\cdot z_2''(t)+$$
$$+a_1\left(C_1(t)\cdot z_1'(t)+C_2(t)\cdot z_2'(t)\right)+a_0\left(C_1(t)\cdot z_1(t)+C_2(t)\cdot z_2(t)\right)=$$
$$=C_1'(t)\cdot z_1'(t)+C_2'(t)\cdot z_2'(t)+C_1(t)\underbrace{\left[z_1''(t)+a_1z_1'(t)+a_0z_1(t)\right]}_{=0}+C_2(t)\underbrace{\left[z_2''(t)+a_1z_2'(t)+a_0z_2(t)\right]}_{=0}=$$
$$=C_1'(t)\cdot z_1'(t)+C_2'(t)\cdot z_2'(t)=b(t)$$

Perché Z1 e Z2 risolvono l'eq caratteristica

5) Devo trovare C'₁ e C'₂ che verifichino $\begin{cases} C_1'(t)\cdot z_1(t)+C_2'(t)\cdot z_2(t)=0 \\ C_1'(t)\cdot z_1'(t)+C_2'(t)\cdot z_2'(t)=b(t)\end{cases}$

Quindi: $C_1(t)=\int\frac{-z_2(t)\cdot b(t)}{z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)}dt$ $\quad C_2(t)=\int\frac{z_1(t)\cdot b(t)}{z_1(t)\cdot z_2'(t)-z_1'(t)\cdot z_2(t)}dt$

D. CAMPI VETTORIALI

1. Definizioni:

| | |
|---|---|
| **Campo vettoriale** | Funzione che ad ogni punto di un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ associa un vettore di $\mathbb{R}^n$ <br> $F:\Omega \to \mathbb{R}^n \quad F(x)=(u_1(x),u_2(x),\dots,u_n(x))\in\mathbb{R}^n$ <br> Componenti del campo: $u_i:\Omega\to\mathbb{R}^n \qquad \Omega\in\mathbb{R}^n$ |
| **Campi continui** | Se $F:\Omega\to\mathbb{R}^n, continua$ e le componenti $u_i:\Omega\to\mathbb{R}^n, continue, \forall i=1,2\dots$ |
| **Campi di classe C1** | Se $\forall i=1,2\dots,u,u_i:\Omega\to\mathbb{R}^n$ sono di classe C1 |
| **Campi irrotazionali** | Campo di classe C1 con $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i,j=1,2,\dots n \quad i\neq j$ <br> <u>Caso n=2</u> <br> $F(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$ se $\forall(x,y)\in\Omega \quad u'_y(x,y)=v'_x(x,y)$ <br> <u>Caso n=3</u> <br> $F(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z),w(x,y,z))$ <br> Se $\forall(x,y,z)\in\Omega \quad \begin{cases} u'_y(x,y,z)=v'_x(x,y,z)\\ u'_z(x,y,z)=w'_x(x,y,z)\\ v'_z(x,y,z)=w'_y(x,y,z)\end{cases}$ |
| **Curve equivalenti** | Dati 2 archi di curva $\varphi_1:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ e $\varphi_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ sono equivalenti se esiste <br> $g:[a,b]\to[c,d], biunivoca$, di classe C1, con $g'(t)\neq 0,\forall t\in[a,b]/\ \varphi_1(t)=\varphi_2(g(t))$ |
| **Curve orientate** | Date 2 curve equivalenti $\varphi_1:[a,b]\to\mathbb{R}^n$, $\varphi_2:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ e $g:[a,b]\to[c,d]$ <br> - Se $g'(t)>0,\forall t\in[a,b]$ -> le curve hanno la stessa orientazione <br> - Se $g'(t)<0,\forall t\in[a,b]$ -> le curve hanno orientazione opposta <br> L'insieme di tutte le curve equivalenti e con la stessa orientazione è detta: **curva orientata** |

2. **Integrale curvilineo di un campo lungo una curva orientata**

Dato un campo $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ e una curva orientata di parametrizzazione $\varphi:[a,b]\to\Omega$

L'integrale curvilineo di F lungo la curva $\gamma$ è dato da: $\int_\gamma F\,dp=\int_a^b F(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

3. **Dipendenza dell'integrale curvilineo dall'orientazione**

| | |
|---|---|
| Enunciato | Dato un campo $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$, se le curve equivalenti $\varphi_1:[a,b]\to\Omega$ e $\varphi_2:[c,d]\to\Omega$ <br> A. Hanno la stessa orientazione $\int_a^b F(\varphi_1(t))\cdot\varphi'_1(t)\,dt=\int_c^d F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds$ <br> B. Hanno orientazione opposta $\int_a^b F(\varphi_1(t))\cdot\varphi'_1(t)\,dt=-\int_c^d F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds$ |
| Dimostrazione A | 1) Considero $g:[a,b]\to[c,d]$ con $g'(t)>0,\forall t\in[a,b]$ per cui $\varphi_1(t)=\varphi_2(g(t))$ <br> 2) $\varphi_2(s)=\left(x_1(s),x_2(s),\dots,x_n(s)\right) \qquad \varphi_1(t)=\left(x_1(g(t)),x_2(g(t)),\dots,x_n(g(t))\right)$ <br> 3) Per il teorema di derivazione della funzione composta <br> $\varphi_1'(t)=\left(x_1'(g(t))\cdot g'(t),x_2'(g(t))\cdot g'(t),\dots,x_n'(g(t))\cdot g'(t)\right)=$ <br> $=g'(t)\left(x_1'(g(t)),x_2'(g(t)),\dots,x_n'(g(t))\right)=g'(t)\cdot\varphi_2(g(t))$ |

| | |
|---|---|
| Dimostrazione A | 4) Per la formula di integrazione per sostituzione e g strettamente crescente $\int_a^b F(\varphi_1(t))\cdot\varphi'_1(t)\,dt = \int_a^b F(\varphi_2(g(t)))\cdot[g'(t)\cdot\varphi'_2(g(t))]\,dt =$ <br> $= \int_a^b F(\varphi_2(g(t)))\cdot\varphi'_2(g(t))\cdot g'(t)\,dt \overset{\substack{s=g(t)\\ ds=g'(t)dt}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds \overset{\substack{g(a)=c\\ g(b)=d}}{=} \int_c^d F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds$ |
| Dimostrazione B | 1) Considero $g:[a,b]\to[c,d]$ con $g'(t)<0, \forall t\in[a,b]$ per cui $\varphi_1(t)=\varphi_2(g(t))$ <br> 2) Ripetendo gli stessi procedimenti del punto A, si ha: <br> $\int_a^b F(\varphi_1(t))\cdot\varphi'_1(t)\,dt \overset{\substack{s=g(t)\\ ds=g'(t)dt}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds \overset{\substack{g(a)=d\\ g(b)=c}}{=}$ <br> $\int_d^c F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds = -\int_c^d F(\varphi_2(s))\cdot\varphi'_2(s)\,ds$ |

4. **Integrale curvilineo lungo curve concatenate**

Date due curve c1 a tratti, $\gamma_1$ e $\gamma_2$, orientate e con un estremo in comune (quindi **concatenate**), l'integrale curvilineo è dato da: $\int_{\gamma_1\oplus\gamma_2} F\,dp = \int_{\gamma_1} F\,dp \oplus \int_{\gamma_2} F\,dp$

*Per l'additività dell'integrale rispetto al dominio di integrazione.*

5. **Campo conservativo**

Dato un campo $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ con $\Omega\in\mathbb{R}^n$ aperto e connesso, se la funzione è di classe C1 e se il suo gradiente è un campo vettoriale continuo allora il campo è conservativo

$$\nabla F:\Omega\to\mathbb{R}^n, \nabla F(x_1,\ldots,x_n) = \left(F_{x_1}'(x_1,\ldots,x_n),\ldots,F_{x_n}'(x_1,\ldots,x_n)\right)$$

6. **Potenziale**

Dato un campo $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$, considero la funzione $g:\Omega\to\mathbb{R}$.
g è un potenziale di F se: $g\in C^1(\Omega)$ e $\forall(x_1,\ldots,x_n)\in\Omega \quad \nabla g(x_1,\ldots,x_n)=F(x_1,\ldots,x_n)$

Def. *Un campo che ammette un potenziale si dice conservativo*

7. **Teorema sull'unicità del potenziale a meno di una costante (potenziali di una campo conservativo)**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $F:\Omega\to\mathbb{R}^n$ campo conservativo 2) $\Omega\in\mathbb{R}^n$ aperto e connesso |
| Tesi | A. Se $g:\Omega\to\mathbb{R}$ è un potenziale di F —> $\forall c\in\mathbb{R}, g+c = potenziale$ di F <br> B. Se $g_1,g_2:\Omega\to\mathbb{R}$ sono potenziali di F —> $\exists c\in\mathbb{R} / g_1(x)-g_2(x)=c, \forall x\in\Omega$ |
| Dimostrazione | A. g è un potenziale di F quindi $\nabla g(x)=F(x) \quad \forall(x)\in\Omega$ <br> Allora $\nabla\left[g(x)+c\right]=\nabla g(x)=F(x) \quad \forall(x)\in\Omega \quad \forall c\in\mathbb{R}$ <br> B. Se g1 e g2 sono potenziali di F, $\forall(x)\in\Omega \quad \nabla g_1(x)=\nabla g_2(x)=F(x)$ <br> Quindi $\nabla\left(g_1(x)-g_2(x)\right)=F(x)-F(x)=0$ <br> Siccome $\Omega$ è connesso, per il teorema delle funzioni a gradiente nullo (g1-g2) deve essere costante, per cui $\exists c\in\mathbb{R} / g_1(x)-g_2(x)=c, \forall x\in\Omega$ |

## 8. Lavoro di un campo conservativo

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo 2) $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto e connesso<br>3) $g:\Omega \to \mathbb{R}$ potenziale di F |
| Tesi | Per ogni curva orientata C1 a tratti con sostegno in **Ω**, si ha: $\int_\gamma F\,dp = g(P_2) - g(P_1)$<br>Con P1 e P2 estremi della curva. |
| Dimostrazione | 1) Supponiamo la curva di classe C1<br>(In caso contrario basterebbe suddividerla nei tratti in cui è composta C1)<br><br>2) Consideriamo la parametrizzazione di **γ**: $\varphi:[a,b] \to \Omega$ con $\varphi(a) = P_1$ e $\varphi(b) = P_2$<br>Allora $\int_\gamma F\,dp = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \overset{\nabla g = F}{=} \int_a^b \nabla g(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) =$<br>$= \int_a^b \frac{d}{dt} g(\varphi(t)) = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = g(P_2) - g(P_1)$ |

9. **Multiteorema: Caratterizzazione dei campi conservativi**

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ campo continuo 2) $\Omega \in \mathbb{R}^n$ aperto e connesso |
| Tesi | Le seguenti proprietà sono equivalenti:<br><br>A. Comunque prese 2 curve orientate di classe C1 a tratti con sostegno in **Ω** e aventi gli estremi nello stesso ordine, si ha: $\int_{\gamma_1} F\,dp = \int_{\gamma_2} F\,dp$<br>B. Comunque presa una curva chiusa di classe C1 a tratti con sostegno in **Ω**, si ha: $\int_\gamma F\,dp = 0$<br>C. Il campo F è conservativo |

## 10. I campi conservativi sono irrotazionali

| | |
|---|---|
| Ipotesi | 1) $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ campo conservativo di classe C1 2) $F(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)) \in \mathbb{R}^n$ |
| Tesi | Il Campo F è irrotazionale: $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \quad \forall i,j = 1,2,\ldots n \quad i \neq j$ |
| Dimostrazione | F è conservativo se $\exists g:\Omega \to \mathbb{R}, g \in C^1 / \nabla g = F$ cioè se $\frac{\partial g}{\partial x_i} = u_i \quad \forall i = 1,2,\ldots n$<br>1) Siccome le componenti sono derivabili con derivate continue<br>Allora anche le derivate parziali sono a loro volta derivabili con eravate continue<br>Quindi g è di classe C2.<br>2) Per il teorema di Schwartz $\forall i,j = 1,2,\ldots n \quad i \neq j \quad \boxed{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}} = \boxed{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_j \partial x_i}}$<br>Sostituendo si ottiene:<br>$\boxed{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i \partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_i} u_j(x) \qquad \boxed{\frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_j \partial x_i}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_j} u_i(x)$ |

11. **Insieme aperto semplicemente connesso** -> se è connesso e se ogni curva semplice e chiusa con sostegno in **Ω** si può deformare con continuità, senza mai uscire da **Ω**, fino a ridurla ad un solo punto

12. **Teorema sui campi irrotazionali di aperti semplicemente connessi**

| | |
|---|---|
| Enunciato | Se $F:\Omega \to \mathbb{R}^n$ è di classe C1 e irrotazionale e se **Ω** è semplicemente connesso allora il campo F è conservativo |